BIBLIOTHECAE
ELECTORALIS
MONACENSIS
Ch. Wink. del.
Söckler sc. 1779.

~~Phil. 2763.a.~~

Math. P. 377
Neumann

~~Matthesis. Geometria applicata. 147.~~

R

Phil. 2763 a

Neue Beyträge zur praktischen Geometrie nebst einem Anhange

von

J. Neumann,
Churpfalzbaierischen Markscheider, und ehmaligen Lehrer der Mathematik in der churfürstlichen Militair-Akademie zu München.

Mit 8 Kupfertafeln.

Mit Begnehmigung der churfürstlichen Bücher-Censurkommißion.

München 1800,
bey Joseph Lentner.

BIBLIOTHECA
REGIA
MONACENSIS

Bayerische
Staatsbibliothek
München

BAYERISCHE
STAATS-
BIBLIOTHEK
MUENCHEN

Vorrede.

Seitdem ich mit des Herrn Bergmeisters Scheidhauer Methode, Markscheiderzüge a) durch Streichsinuse und Streichcosinuse zuzulegen, näher bekannt geworden bin, auch von derselben Vortreflichkeit durch eigene Anwendung bey der Aufnahme der Bley- und Galmeygruben auf

* 2 den

a) Das heißt, aus der Markscheider- in die Feldmessersprache übersetzt: Mit dem Kompaß gemessene Winkel, ohne ihn, blos vermittelst berechneter Abszissen und Ordinaten, zu verzeichnen.

dem Rauschenberg b) mich zur Genüge überzeugt hatte, ward in mir der Gedanke rege, dieselbe auch auf geometrische Vermessungen, wobey zwar nicht der Kompaß, sondern der Winkelmesser gebraucht worden ist, ehest anzuwenden. Es ist außer Zweifel, daß der Grund, warum eine aus dem Umfange gemessene Figur, bey dem Auftragen so hart

zum

b) Diese Gruben werden, in Hinsicht auf ihre geognostische Lage, von allen Kennern für einige der merkwürdigsten gehalten. Das Erz bricht hier weder in Gängen, noch in Flözen; sondern in Puzen und Nestern von nicht selten außerordentlicher Größe. Zu der Vermessung und Aneinanderreihung der hin und wieder zerstreuten Gruben, Stollen und Strecken, mußte ich über 700 Winkel (ohne die Messung über Tage mitzuzählen) mit dem Kompaß messen, die ich sämmtlich ohne denselben, und nur vermittelst Abszissen und Ordinaten, die ich vorher berechnet hatte, zu Papier brachte.

zum Schluße gebracht werde, nicht so sehr in den bey der Messung begangenen Fehlern liege, als in der Methode selbst, wie man dieses gewöhnlich zu bewerkstelligen suche. Denn es ist schlechterdings unmöglich, mit irgend einen gerade = oder krummlinichten Transporteur die Winkel auf dem Papier so zuverlåßig zu zeichnen, als sie auf dem Felde gemessen worden sind, vornehmlich, wenn man die Richtigkeit bis auf einzelne Minuten, oder gar Sekunden treiben wollte.

Aber auch dadurch, daß man die Figur in Dreyecke zerleget, derselben Seiten berechnet, und so aus den berechneten Seiten die Dreyecke verzeichnet, wird die Sache der Wahrheit nicht viel näher gebracht. Gemeiniglich fallen die

Durch=

Durchschnittspunkte der Bögen mehr oder weniger unbestimmt aus, und der daher sich ergebende, im Einzelnen kaum merkliche Fehler, wächst immer, durch andere und andere vermehrt, bis zur ahndungswehrten Größe an. Ganz anders verhält es sich, wenn man die gemessenen Seiten und Winkel vermittelst Abszissen und Ordinaten bestimmet.

Daß aber die Scheidhauersche Methode sich nicht so ganz unbedingt auf geometrische Vermessungen anwenden lasse, daran glaube ich nach reifem Ueberdenken der Sache, in der, dem Markscheider eigenen Weise die Winkel zu messen, den Grund gefunden zu haben. Der Markscheider braucht zur Messung der Winkel den Kompaß, und daher haben alle so gemessene Winkel die Rich-

tung der Magnetlinie zu ihrem einen Schenkel, und weil diese in den kleinen Theil der Erdfläche, worauf sich die Messung jedesmal beschränket, unwandelbar ist, so sind auch alle diese untereinander parallel; welches aber bey geometrischen Vermessungen gewöhnlich nicht Statt hat. Soll also die vorhin erwähnte Methode auch hierauf unwendbar seyn, so müßen die auf gewöhnliche Weise gemessenen Winkel, auf andere, die alle den einen Schenkel unter sich, und mit irgend einer Richtungslinie parallel liegen haben, reduziret werden.

Diese Idee lag lange im Kreise des Möglichen, bis sie durch die glückliche Bemerkung: daß der Winkel, welchen die durch irgend einen Eckpunkt mit jeder beliebigen Seite eines Poligons

paral-

parallel gezogene Linie mit der anlie- genden Poligonsseite macht, allen zwischen ihm und der angenomme- nen Seite liegenden Nebenwinkeln zusammen gleich ist, sich daraus entwi- ckelte, und in Wirklichkeit übergieng. Die fernere Analisirung meiner Entde- ckung führte mich auf den Satz (§. 17.) der für die Geometrie überhaupt nicht unwichtig seyn dürfte. Der Satz (§. 37.) öfnete mir ein neues weites Feld: ich lösete damit die Aufgabe auf: Wenn al- le Seiten und Winkel eines Poligons, drey Stücke ausgenommen, bekannt sind, diese unbekannte Stücke in Zah- len zu finden, welche zur Zeit in allen mathematischen Lehrbüchern vermißt wird. Auch sonst wird diese Aufgabe sehr man- gelhaft aufgelöset; man begnüget sich ge- wöhnlich die ganze Figur durch gezogene

Diagonalen in Dreyecke zu zerlegen, berechnet diese nebst den anliegenden Winkeln trigonometrisch, und schließet so von Dreyeck zu Dreyeck fort, bis man seine Absicht erreicht hat, welches aber doch in manchen Fällen (§. 51.) unmöglich ist. Diese Aufgabe löse ich nun auf eine ganz allgemeine Weise ohne Beyhilfe fremder Linien, ganz allein aus den gegebenen Seiten und Winkeln, auf. Drey Gleichungen, welche die regelmäßigste Gestalt der Glieder zeigen, lösen alles auf, was nur in diesem Fall gefordert werden mag.

Zum Behufe der Anfänger zeige ich den Gebrauch dieser Gleichungen in arithmetischen Beyspielen, derer ich geflissentlich solche wählte, von denen ich glaubte, daß sie nothwendig wären, um die Anfänger mit dem Begriff positiver und

nega=

negativer Winkel und ihrer trigonometrischen Funktionen, bekannter zu machen.

Von §. 56. bis §. 66. zeige ich den Flächeninhalt der Poligone durch eine aus den vorigen abgeleitete neue Gleichung zu finden, welche keine andere Größen, außer der gegebenen Seiten und Winkeln enthält, und sich wegen der leicht zu behaltenden Reihenform ihrer Glieder empfiehlt.

Auf eben diese Gleichung gründete ich die Lehre von der Theilung der Flächen. Ich zeige in den §§. 66. bis 79. wie jede gegebene Fläche den jedesmaligen Bedingnissen gemäß, in gleiche oder ungleiche Theile, nach jeder Richtung, auch mit Rücksicht auf die verschiedene Güte des Bodens, getheilet werden möge,

ge, wobey ich auch den Fall nicht ausschließe, wo die Winkel nicht in Graden und Minuten; sondern durch die Lage der Seiten gegeben sind, wenn nämlich eine Figur mit dem Meßtisch anstatt mit dem Winkelmesser aus ihrem Umfange aufgenommen worden ist.

Ich denke den Feldmesser, welcher Ehrgefühl und Rechtschaffenheit besitzet, und seinen Arbeiten alle nur mögliche Richtigkeit zu geben suchet, hiedurch einen ganz wesentlichen Dienst erwiesen zu haben. Er ist nun im Stande, eine mit dem Winkelmesser aus ihrem Umfange aufgenommene Figur, so genau als nur immer möglich ist, zu verzeichnen, zu berechnen, und zur Prüfung seiner Arbeit, jede beliebige Diagonal durch Rechnung zu bestimmen.

Von

Von §. 79. bis §. 104. wird von den Eigenschaften der Poligone gehandelt, welche entweder *in* oder *um* einen Zirkel beschrieben werden können. Obschon diese Sätze, in der Ausübung noch zur Zeit keinen sonderlichen Nutzen bringen, so schienen sie mir doch, theils der wissenschaftlichen Vollständigkeit, theils selbst ihrer Neuheit wegen — mir wenigstens ist keine Schrift bekannt, worin sie abgehandelt wurden — einen Platz in diesem Werkchen zu verdienen. Und — muß denn jeder neu entdeckte Lehrsatz auf der Stelle auch schon anwendbar seyn? können nicht mit der Zeit andere wahrhaft praktische Sätze daraus gefolgert werden? Ist nicht auf den dem Anscheine nach unbedeutenden Sätzen von den Scheitel- und Wechselwinkeln die ganze weitumfassende Geometrie gebauet? — Was ich eben von

diesen Sätzen sagte, muß auch von den darauf folgenden bis §. 111. verstanden werden.

Von §. 112. bis §. 120. wird von der Berechnung der Oberflächen und des Inhaltes jener Körper, welche durch die Umdrehung einer geradelinichten Figur um eine unbewegliche Achse entstehen, gehandelt. Ich bediene mich dabey der bekannten Guldinischen Regel, und zeige nur, wie vermittelst des bisher vorgetragenen, die Rechnung ganz leicht, ohne mindeste Anstrengung, nach einer leicht faßlichen Ordnung geführt werden möge.

Endlich gebe ich noch von einem bis jezt noch wenig bekannten Zuleginstrumente Nachricht, dessen Esinder, der

bereits verstorbene Hr. Fuhrmann, Churpfalzbaierischer Oberverweser zu Bodenwöhr, es zwar nur für den Markscheider allein bestimmet hat, welches aber nach meiner Anweisung, und nach einer leicht dabey anzubringenden Verbesserung, auch für den Feldmesser brauchbar gemacht werden kann, und wodurch geradlinichte Figuren überhaupt mit weit mehr Bequemlichkeit und Genauigkeit verzeichnet werden können, als solches von dem Feldmesser vermittelst des Transporteurs, und von dem Markscheider vermittelst des Kompaß erzielt zu werden pflegt.

Ich schmeichle mir einen für die mathematische Wissenschaft nicht unwichtigen Beytrag geliefert zu haben. Ist das unbefangene mathematische Publikum

kum gleicher Meinung mit mir, so bin ich für meine Mühe schon reichlich belohnt.

München den 18ten Juny, 1798.

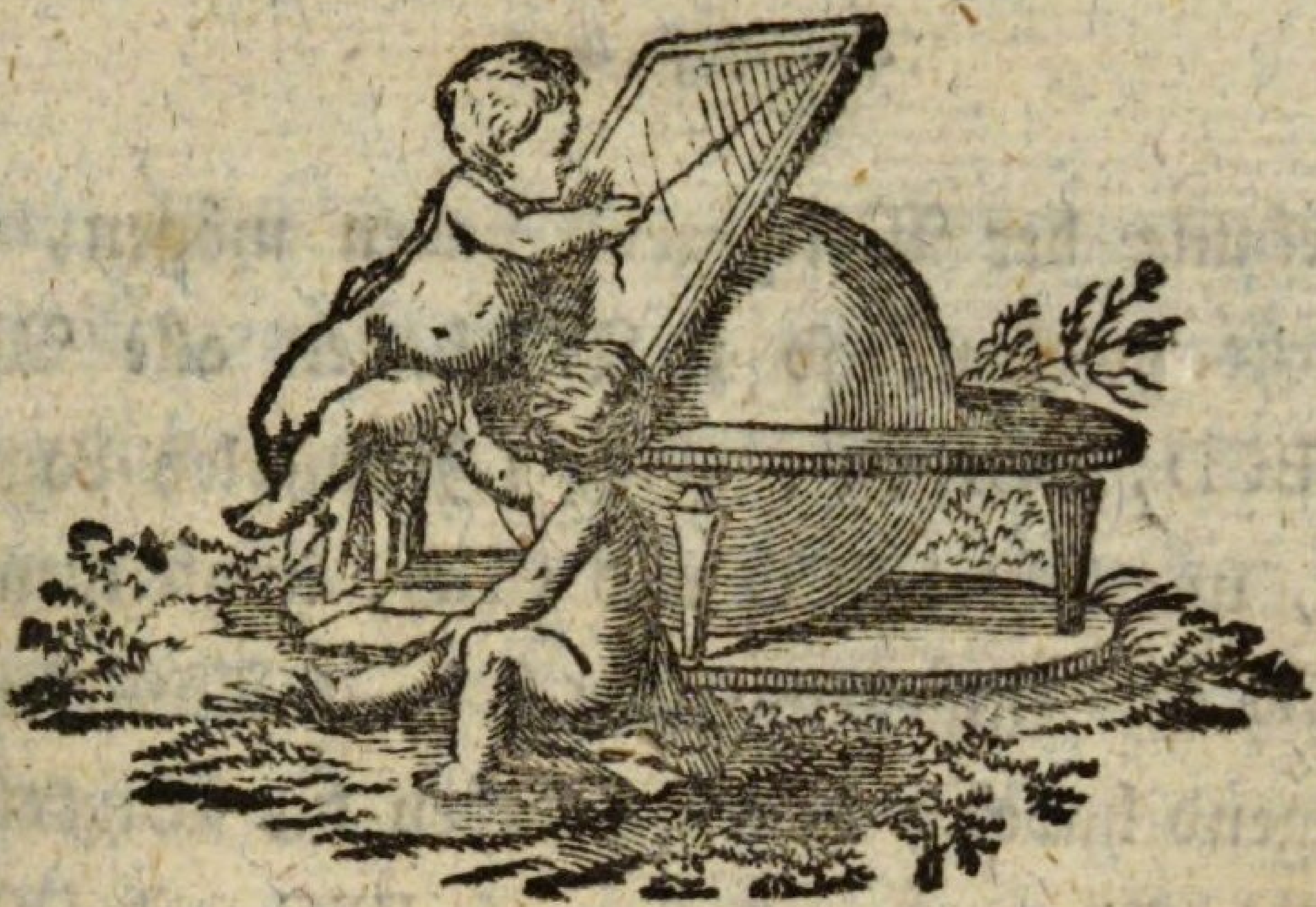
Verbesserungen
einiger Druck- und Schreibfehler.

Seite 30, 5te Zeile von unten müßen die Worte (wenn die Linie AB von der LA so wie die Figur zeiget, nach der rechten abweichet) ausgestrichen, und dafür (wenn man die Figur so vor sich liegen hat, daß LA mit der Brust parallel, und AB so wie die Figur zeiget, sich an dem linken Ende der Linie LA befindet) gesetzt werden.

Pag. 156 ist der §. Nummer 83 bey Lehrsatz zu setzen vergessen worden, wodurch denn die folgenden §§. immer um einen hinaufgerückt zu denken sind, bis pag. 160, wo bey §. 86. dann §. 87 zu stehen gekommen wäre, wornach diese dann in ihrer Ordnung wieder fortlaufen.

Die Uebrigen etwa eingeschlichenen und weniger erheblichen Fehler beliebe der gütige Leser selbst zu verbessern.

Erstes



Erstes Kapitel.

Von der Lage der Winkel, und von ihrer Bezeichnung überhaupt.

§. 1.

Erklärung.

Wenn ein Punkt A sich nach B, C, D... fort beweget, und in diesen Punkten seine Richtung ändert, so kann diese Aenderung entweder in allen diesen Punkten immer nach einerley Seite hin z. B. immer nach der rechten Seite, oder bald nach der rechten, und bald nach der linken Seite hin geschehen, und die in diesen Punkten entstehenden Winkel, haben im ersten Falle einerley Lage unter sich, im zweyten Falle aber haben einige derselben in Rücksicht der übrigen eine entgegengesetzte Lage. Auf ihre Lage, die sie

in Ansehung der Weltgegend haben mögen, wird hier nicht gesehen, so z. B. haben alle Winkel ABC, BCD, CDE . . . (Fig. 1.) einerley Lage unter sich, unerachtet BCD und CDE, imgleichen EFG und FGH eine entgegengesetzte Lage in Ansehung der Weltgegend haben; dagegen haben die Winkel BCD und FGH (Fig. 2.) und so auch EFG und CDE eine entgegengesetzte Lage unter sich, obschon in Rücksicht der Weltgegend ihre Lage einerley ist.

Um in einer und derselben Figur die einen Winkel von den andern in der Rechnung zu unterscheiden, werde ich mich der Zeichen + und — bedienen.

§. 2.

Erklärung.

Wenn eine gebrochene Linie ABC . . . H (Fig. 3.) wieder in sich selbst zurückläuft, aber nicht so wie Fig. 1. und 2. von sich selbst durchschnitten wird, sondern einen Raum begrenzet, so wird die Figur überhaupt ein Poligon genannt. Die Poligonswinkel ABC, BCD . . . können entweder alle einerley Lage unter sich haben, wie Fig. 3, oder sie haben nicht alle einerley Lage wie z. B. Fig. 4. Erstere pflegt man Poligone mit lauter ausgehenden Winkeln, und letztere, Poligone mit eingehenden Winkeln zu nennen. Nach der gegebenen Erklärung,

klärung, kann man die erstere, Poligone mit lauter positiven Winkeln, und leztere Poligone, welche auch negative Winkel haben, nennen. Ich werde im folgenden die ausgehenden Winkel jederzeit mit +, und die eingehenden mit — bezeichnen.

§. 3.

Anmerkung.

Diese Bezeichnungsart ist, meines Erachtens, nicht nur der Sache recht angemessen; sondern auch in der praktischen Geometrie nicht ohne Nutzen; denn man braucht z. B. bey Ausmessung einer Figur aus ihrem Umfange vermittelst des Winkelmessers, die gemessenen ein- und ausgehenden Winkel nur durch + und — von einander zu unterscheiden, und ihre Größe nur bloß in das Manual einzutragen, ohne nöthig zu haben, die Figur selbst in die Schreibtafel zu verzeichnen.

Eben so können eine ganze Reihe aufeinander folgender Winkel z. B. die Krümmungen eines Flußes, einer Strasse u. d. g. ganz gemächlich ohne Irrung eingetragen werden.

§. 4.

Erklärung.

Unter dem Ausdrucke Nebenwinkel will ich denjenigen Winkel verstanden wissen, welcher mit

einem andern einen seiner Schenkel gemein hat, und ihn zu 180° ergänzet, er mag übrigens ein aus- oder eingehender Winkel seyn. Er ist positiv, wenn sein Mitwinkel positiv, und negativ wenn dieser negativ ist. So z. B. sind bBC, eCD (Fig. 2.) positive, dDE, gGH hingegen negative Nebenwinkel, wenn man ABC als positiv annimmt. Ich werde im folgenden die Nebenwinkel jederzeit nur mit einem einzigen an der Spitze des Winkels sich befindenden Buchstaben bezeichnen, wenn die Umstände nicht ein anderes erfordern werden.

§. 5.

Lehrsatz.

Die Summe aller Poligonswinkel eines Poligons, welches lauter ausgehende Winkel hat, ist $= 180° (n - 2)$, wenn n die Anzahl der Seiten desselben bedeutet.

Beweis.

Ein jedes Poligon ABCDE ... (Fig. 3.) kann durch Diagonalen in Dreyecke zerleget werden, deren Anzahl $= n - 2$ ist; denn es ist augenscheinlich, daß nur zu dem ersten und letzten Dreyecke zwey Seiten, zu allen übrigen aber nur eine Seite des Poligons verwendet werden darf. Nun ist aber die

Sum-

Summe aller Winkel aller dieser Dreyecke, welches eben die Summe aller Poligons-Winkel ist, $= 180^\circ (n - 2)$, folglich ist erwiesen w. z. e. w.

§. 6.

Lehrsatz.

Die algebraische Summe (mit Hinsicht auf + und − nämlich) aller Winkel eines n seitigen Poligons, welches auch eingehende Winkel hat, deren Anzahl $= m$ ist, ist $= 180^\circ (n - 2 - 2m)$.

Beweis.

Man zerlege die ganze Figur ABC...K (Fig. 4.) durch Diagonalen in lauter Dreyecke, so wird, eben so, wie im vorigen, und aus eben der Ursache, ihre Anzahl $= n - 2$, und die Summe aller ihrer Winkel $= 180^\circ (n - 2)$ seyn; aber in dieser Summe sind nicht die eigentlichen Poligons-Winkel CDE, ABC, GHK, sondern ihre Supplementen zu 360° begriffen, denn es ist $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 360^\circ - CDE$, $8 + 9 = 360^\circ - GHK$, $10 + 11 = 360^\circ - ABC$. Man setze die Summe aller ausgehenden Winkel $A + B + C + --- = p$, so hat man $p + 360^\circ - CDE + 360^\circ - GHK + 360^\circ - ABC --- = 180^\circ (n - 2)$, oder auch, wenn

man

man noch die Anzahl der eingehenden Winkel $= m$ setzet, und ihre Summe $CDE + GHK + ABC$ - - - $= q$ ist, so hat man $p + m . \breve{360} - q = \breve{180} (n - 2)$, oder $p - q = \breve{180} (n - 2) - m . \breve{360} = \breve{180} (n - 2) - 2 m . \breve{180} = \breve{180} (n - 2 - 2 m)$. Nun ist aber $p - q$ die algebraische Summe aller Poligons-Winkel, folglich ist erwiesen w. z. e. w.

§. 7.

Ist demnach $n > (2 m + 2)$, so ist $p - q$ positiv, und folglich ist die Summe aller ausgehenden Winkel größer, als die der eingehenden, ist $n < (2 m + 2)$, so ist das Gegentheil; ist aber $n = 2 m + 2$, so sind beyde Summen einander gleich, und folglich die algebraische Summe $= 0$, da aber $2 m + 2$ eine gerade Zahl vorstellet, so kann letzteres nur bey einem Poligon von einer geraden Anzahl Seiten sich ereignen.

Aufgabe.

§. 8.

Die algebraische Summe aller Winkel eines Poligons bis auf einen einzigen ist gegeben. Man soll diesen letztern sowohl seiner Größe als Beschaffenheit nach, ob er nämlich aus- oder eingehend ist, finden?

Auf-

Auflösung.

Es sey die Anzahl der Seiten = n, die Anzahl der bekannten eingehenden Winkel = m, (m kann auch = 0 seyn) und die algebraische Summe aller bekannten Winkel = S, so merke man folgende Regel. Ist $S > 18\breve{0}\,(n - 2m - 3)$, so ist der unbekannte Winkel ein ausgehender, und dessen Größe $= 18\breve{0}\,(n - 2m - 2) - S$.

Ist aber $S < 18\breve{0}\,(n -- 2m - 3)$, so ist er ein eingehender Winkel, und dessen Größe $= S - 18\breve{0}\,(n - 2m - 4)$.

Beweis.

Man setze, der unbekannte Winkel x sey ein ausgehender, so muß $S + x = 18\breve{0}\,(n - 2m - 2)$ seyn (§. 6.) und daraus erhält man $x = 18\breve{0}\,(n - 2m - 2) - S$, da aber $x < 18\breve{0}$ seyn muß (§. 4.) so ist auch $18\breve{0}\,(n - 2m - 2) - S < 18\breve{0}$, oder $18\breve{0}\,(n - 2m - 3) < S$, welches eben der zuerst genannte Fall ist.

Man setze hingegen, der unbekannte Winkel x sey ein eingehender, so ist die Anzahl der eingehenden Winkel dieses Poligons = m + 1, und daher auch $S - x = 18\breve{0}\,(n - 2m - 4)$ (wenn man näm=

nämlich in (§. 6.) $m + 1$ anstatt m setzet) und daraus wird $x = S - 180^\circ (n - 2m - 4)$, und wegen $x < 180^\circ$, auch $S - 180^\circ (n - 2m - 4) < 180^\circ$, oder auch $S < 180^\circ (n - 2m - 4 + 1)$ das ist, $S < 180^\circ (n - 2m - 3)$, welches eben der zweyte genannte Fall ist.

§. 9.

Lehrsatz.

Die algebraische Summe aller Nebenwinkel eines Poligons, es mag dasselbe lauter ausgehende, oder auch eingehende Winkel haben, ist $= 360^\circ$.

Beweis.

Es sey ABC - - - F (Fig. 3.) ein Poligon mit lauter ausgehenden Winkeln, so ist $A + FAB = 180^\circ$, $B + ABC = 180^\circ$, $C + BCD = 180^\circ$, ... Ist nun die Anzahl aller Seiten $= n$, so ist auch die Summe aller Poligonswinkel nebst der ihrer Nebenwinkel $A, B, C \ldots = n. 180^\circ$. Es sey nun die Summe den Poligonswinkel $= v$, und die der Nebenwinkel $= S$, so ist $v + S = n. 180^\circ$, es ist aber $v = 180^\circ (n - 2)$ (§. 5.), folglich wenn man diese Gleichung von der vorigen abziehet, $S = 180^\circ. n - 180^\circ (n - 2) = 360^\circ$.

Es

Es sey ABC---K (Fig. 4.) ein Poligon mit eingehenden Winkeln, derer Anzahl $= m$ ist, so ist die Anzahl der ausgehenden $= n - m$. Es sey ferner die Summe aller ausgehenden Winkel $= p$, und die ihrer Nebenwinkel $= P$, ferner sey die Summe aller eingehenden Winkel $= q$, und die ihrer Nebenwinkel $= Q$; so ist $p + P = 180^\circ (n - m)$, und eben so ist bey den eingehenden Winkeln $D + CDE + H + GHK + B + ABC \ldots = 180^\circ . m$, das ist, $q + Q = 180^\circ . m$, aus der vorigen Gleichung erhält man $p = 180^\circ (n - m) - P$, und aus der letztern bekömmt man $q = 180^\circ . m - Q$, und durch die Subtraktion erhält man $p - q = 180^\circ (n - 2m) - P + Q$; es ist aber auch $p - q = 180^\circ (n - 2m - 2)$ (§. 6.), folglich ist auch $180^\circ (n - 2m) - P + Q = 180^\circ (n - 2m - 2)$, und nach gehöriger Reduktion, $P - Q = 2 . 180^\circ = 360^\circ$. Nun ist aber $P - Q$ die algebraische Summe aller Nebenwinkel, folglich ist erwiesen, was zu e. w.

§. 10.

Zusatz.

Wenn demnach die Summe aller Nebenwinkel eines Poligons bis auf einen einzigen bekannt ist, so ist auch dieser bekannt; denn man darf nur die bekannte algebraische Summe von 360° abziehen,

so

so zeigt der Ueberrest sowohl die Größe, als Beschaffenheit des unbekannten Nebenwinkels an. Er ist nämlich entweder der Nebenwinkel eines aus- oder eingehenden Winkels, je nachdem dieser Ueberrest positiv oder negativ ist.

§. 11.

Aufgabe.

AB (Fig. 5.) sey eine auf dem Felde gegebene gerade Linie, zu welcher man von einem angewiesenen Punkte F weder in gerader Linie dahin kommen, noch auch dahin sehen kann. Man soll aus diesem Punkt F eine Linie FG ausstecken, so daß FGA einen gegebenen Winkel x gleich sey.

Auflösung.

Man suche von A nach F durch was immer für einen Umweg zu kommen; messe alle Winkel BAC, ACD, CDE - - -, so hat man in dem Poligon ACDEFG alle Winkel bis auf EFG bekannt, folglich kann dieser nach (§. 8.) gefunden werden.

Es seyen z. B. (Fig. 5.) die Winkel $BAC = +60^{\circ}$, $ACD = +104^{\circ}$, $CDE = -92^{\circ}$, $DEF = +77^{\circ}$, und der vorgegebene Winkel $AGF = +102^{\circ}$, so ist $n = 6$, $m = 1$, $S = 60^{\circ} + 104^{\circ} - 92^{\circ} + 77^{\circ} + 102^{\circ} = 251^{\circ}$, und $n - 2m - 3 = 1$, al-

so

so $S > \breve{180}\,(n - 2m - 3)$, daher ist $x = EFG = \breve{180}\,(n - 2m - 2) - S = \breve{360} - \breve{251} = \breve{109}$ ein ausgehender Winkel.

Zweytes Beyspiel.

Es seyen die gemessenen Winkel (Fig. 6.) GAC $= +\breve{70}$, ACD $= +\breve{64}$, CDE $= -\breve{80}$. DEF $= +\breve{35}$, und der gegebene FGA $= +42^\circ$, so ist wieder $n = 6$, $m = 1$, $n - 2m - 3 = \breve{1}$, und $S = 70^\circ + 64^\circ - 80^\circ + 35^\circ + \breve{42} = \breve{131}, < \breve{180}\,(n - 2m - 3)$, daher ist $x = EFG = S - \breve{180}\,(n - 2m - 4) = S - 0, = \breve{131}$ ein eingehender Winkel. Richtet man demnach in dem Punkte F auf der Linie EF einen Winkel EFG auf, welcher den in den so eben gegebenen Beyspielen gleich ist, so ist geschehen, was verlangt war.

§. 12.

Zusatz.

Soll aus dem Punkt F eine senkrechte Linie FK auf AB ausgesteckt werden, so darf man nur in den vorigen Beyspielen FGA $= 90^\circ$ setzen, und im übrigen nach der gegebenen Auflösung verfahren.

§. 13.

Aufgabe.

Es bleibe alles so, wie in (§. 11.) angenommen worden ist. Man verlangt aber durch F eine mit AB Parallel FG auszustecken. (Fig. 7.)

Auflösung.

Man denke sich aus einem beliebigen Punkte G der Linie FG eine auf AB senkrechte GH, so sind die Winkel bey G und H = 90, und man hat wieder in dem Poligon AHGF---C alle Winkel bis auf EFG bekannt, folglich kann auch dieser noch (§. 8.) gefunden werden.

Es sey z. B. BAC = + 128, ACD = + 119, CDK = + 87, DKL = − 39, KLM = + 99, LME = − 125, MEF = + 34, so ist n = 10, m = 2, S = 128 + 119 + 87 − 39 + 99 − 125 + 34 + 90 + 90 = 483, n − 2m − 3 = 3, also S < 180 (n − 2m − 3), daher ist x = EFG = S − 180 (n − 2m − 4) = 483 − 360° = 123 ein eingehender Winkel.

Zweytes Beyspiel.

Es seyen die gemessenen Winkel (Fig. 8.) BAC = + 29, ACD = − 72, CDK = + 58, DKL = − 90,

KLM

$KLM = +\breve{92}$, $LME = +\breve{128}$ $MEF = -\breve{95}$, so ist $n = 10$, $m = 3$, $n - 2m - 3 = 1$, und $S = \breve{29} - 72^\circ + 58^\circ - 90^\circ + 92^\circ - 128^\circ - 95^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 230^\circ > 180^\circ (n - 2m - 3)$, daher ist EFG ein ausgehender Winkel $= 180^\circ (n - 2m - 2) - S = 360^\circ - 230^\circ = 130^\circ$.

§. 14.

Lehrsatz.

Wenn man durch alle Winkel B, C, D, ... eines Poligons, (Fig. 9.) oder überhaupt einer gebrochenen Linie ABC---H (Fig. 10.) mit was immer für einer beliebigen Linie z. B. AH Parallelen nach einerley Richtung An, Bn, Cn, Dn--- ziehet, und aus denselben Punkten die Zirkelbögen na, nb, nc---- immer nach einerley Richtung von der Parallele bis zur nächstfolgenden Seite des Poligons, oder der gebrochenen Linie ziehet, so ist jeder dieser Bögen der algebraischen Summe aller derjenigen Bögen gleich, welche die Maaße der vorhergehenden Nebenwinkel sind. Das ist, z. B. der Bogen nc ist der algebraischen Summe der Bögen gleich, welche die Maaße der Nebenwinkel A + B + C sind.

Beweis.

Man verlängere alle Seiten, bis dieselbe diese Bögen in b', c', d' ... durchschneiden, so ist

$nb = nb' + b'b$. Nun ist aber $nb' = na =$ dem Bogen, der das Maaß des Nebenwinkels A ist, und $b'b$ ist das Maaß des Nebenwinkels B.

Eben so ist $nc = nc' + c'c$, es ist aber $nc' = nb$ (der äußere dem innern zwischen zwey Parallellen) $= A + B$, und $c'c$ ist das Maaß des Nebenwinkels C, folglich ist auch $nc = A + B + C$. Weiters $nd = nd' \pm d'd$ (Fig 9. u. 10.) $= nc \pm d'd$, nc aber ist das Maaß von $A + B + C$, und $d'd$ ist das Maaß des Winkels D, daher ist auch $nd = A + B + C + D$.

Ferners $ne = ne' - e'e$ (Fig. 9.) oder $ne = nd - e'e$, es ist aber $nd = A + B + C \pm D$, und $e'e = E$, folglich auch $ne = A + B + C \pm D - E$, und eben so kann man es von allen übrigen Bögen erweisen.

§. 15.

Lehrsatz.

Wenn man durch einen beliebigen Winkel A einer geradelinichten Figur oder was immer für einer gebrochenen Linie ABCD . . . L (Fig. 11.) eine gerade Linie MN unter einen beliebigen Winkel $\alpha = MAB$ ziehet, und ferner durch alle übrige Winkelpunkte die mit MN parallelen Bn, Cn, Dn . . . und auf diesen die Bögen nb, nc, nd, ne . . . so wie in dem vorigen § gesagt worden ist, ziehet, so gilt auch von diesen Bögen, was in dem vorigen § gesagt wor-

worden ist; es ist nämlich auch hier nd $= \alpha +$ B $+$ C $+$ D wenn man auf die positive oder negative Beschaffenheit der Winkel Rücksicht nimmt.

Beweis.

Man darf nur den im vorigen § gegebenen Beweis fast von Wort zu Wort wiederholen, und nur überall α anstatt A setzen. Z. B. nb $=$ nb' $-$ b'b, es ist aber nb' $=$ na $= \alpha$, und b'b $= \beta$, daher ist auch u. s. w.

§. 16.

Zusatz.

Was in den beyden vorigen §§ von den Bögen, welche von der Linken zur Rechten gezogen werden, gesagt worden ist, dieses gilt auch von den Bögen, welche auf der andern Seite der Figur von der rechten zur linken Seite gezogen werden, es ist z. B. n'k' $= \beta +$ L $+$ K, n'h' $= \beta +$ L $+$ K $+$ H, u. s. w.

§. 17.

Zusatz.

Man ziehe durch einen beliebigen Winkel E (Fig. 12.) mit einer Seite der Figur z. B. AK eine Parallel MN, so ist A $+$ B $+$ C $+$ D $=$ nd. Nun ist aber nd $+$ en $= 180^\circ$, folglich ist auch A $+$ B $+$ C $+$ D $+$ en $= 180^\circ$, und das nämliche kann

auch

auch auf der andern Seite der Figur erwiesen werden, es ist nämlich auch K + H + G + F + fn = 180°. Es ist demnach die algebraische Summe aller Nebenwinkel einer zwischen zwey Parallelen gebrochenen Linie = 180°.

§. 18.

Lehrsatz.

Wenn man durch einen beliebigen Winkel O eines Poligons ABC - - - K (Fig. 13.) eine Linie OP mit einer andern Linie MN, welche mit AB einen beliebigen Winkel α einschließet, parallel ziehet, so ist ein jeder Winkel, dessen Spitze nach der Gegend M zuliegt, wie BOQ, DRS, FTU, HWP der algebraischen Summe aller zwischen itzt genannten Parallelli- nien enthaltenen Nebenwinkeln, welche ebenfalls nach der nämlichen Gegend zuliegen, gleich, das ist, BOQ = α + B, DRS = α + B + C + D, FTU = α + B + C + D + E + F, u. s. w.

Und eben so ist ein jeder Winkel, wie APW, HUT, FSR, dessen Spitze nach der Gegend N zu lieget, wo sich der Winkel β befindet, der algebraischen Summe aller nach dieser Seite zu, zwischen den genannten Parallelen enthaltenen Nebenwinkel gleich, nämlich APW = β, HUT = β + K + H, FSR = β + K + H + G + F, DQO = β + K + H + G + F + E + D, u. s. w.

Be-

Beweis.

Man ziehe durch alle Winkel, die mit MN parallelen B'B, cc', dd', ee', so ist QOB = OBB' (Wechselwinkel) = α + B (§. 15.).
DRS = RDd = α + B + C + D, UTF = TFf = α + B + C + D + E + F u. s. w. Und eben so ist es auf der andern Seite der Figur, nämlich WPA = PAN = β.
HUT = UHh' = β + K + H (§. 16.) FSR = SFf' = β + K + H + G + F. DQO = QDd' = β + K + H + G + F + E + D u. s. w.

§. 19.
Zusatz.

Wird OP mit AB anstatt mit MN parallel gezogen, so wird α = o, und β = A, demnach ist in diesem Falle QOB = B, SRD = B + C + D, u, s. w.

Ferner WPA = A, TUH = A + K + H, u. s. w. Man muß sich diese Sätze wohl merken, wir werden weiter unten Gebrauch davon machen.

Zweytes Kapitel
von der Verzeichnung und der Berechnung der Peligone.

§. 20.
Erinnerung.

Damit die Anfänger in den Beweisen folgender Sätze nicht aufgehalten werden mögen, so müßen sie sich die folgenden Lehrsätze aus der analitischen Trigonometrie geläufig machen. Ich setze sie ohne Beweise her, weil man diese in allen mathematischen Lehrbücher findet.

§. 21.
Lehnsätze.

1) $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha . \cos \beta + \sin \beta . \cos \alpha.$

2) $\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha . \cos \beta - \sin \beta . \cos \alpha.$

3) $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha . \cos \beta - \sin \beta . \sin \alpha.$

4) $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha . \cos \beta + \sin \alpha . \sin \beta.$

Folgerung.

Man setze in 1) und 3) $\alpha = \beta = 9\breve{0}$, so erhält man $\sin 18\breve{0} = 0$, und $\cos 18\breve{0} = -1$.

Setzet man $\alpha = 180°$, $\beta = 90°$, so ist $\sin 27\breve{0} = -1$, $\cos 27\breve{0} = 0$.

Setzet

Setzet man ferner $\alpha = 27\breve{0}$, und $\beta = 9\breve{0}$, so ist $\sin = \breve{0}$, und $\cos 36\breve{0} = 1$.

Für $\alpha = 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$, und $\beta = a$, erhält man folgendes:

$\sin(90^\circ + a) = \cos a$, $\sin(90 - a) = \cos a$.

$\sin(180^\circ + a) = - \sin a$, $\sin(180^\circ - a) = \sin a$.

$\sin(270^\circ + a) = - \cos a$, $\sin(270^\circ - a) = - \cos a$.

$\sin(360^\circ + a) \sin a$, $\sin(360^\circ - a = - \sin a$.

$\cos(90^\circ + a) = \sin a$, $\cos(90^\circ - a) = \sin a$.

$\cos(180^\circ + a = - \cos a$, $\cos(180^\circ - a) = - \cos a$.

$\cos(270^\circ + a) = \sin a$, $\cos(270^\circ - a) = - \sin a$.

$\cos(360^\circ + a) = \sin a$, $\cos(360^\circ - a) = \cos a$.

Man setze $\alpha = a$, und $\beta = 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$, so erhält man

$\sin(a - 90^\circ) = - \cos a$, $\sin(a - 180^\circ) = - \sin a$.

$\sin(a - 270^\circ) = \cos a$, $\sin(a - 360^\circ) = \sin a$.

$\cos(a - 90^\circ) = \sin a$, $\cos(a - 180^\circ) = - \cos a$.

$\cos(a - 270^\circ) = - \sin a$, $\cos(a - 360^\circ) = \cos a$.

Ferner ist $\sin a : \cos a = \operatorname{tang} a$, und $\cos a : \sin a = \operatorname{cotang} a$, und daher erhielt man aus dem vorigen

$\operatorname{tang}(90^\circ + a) = - \operatorname{cot} a$, $\operatorname{tang}(90^\circ - a) = \operatorname{cotang} a$.

$\operatorname{tang}(180^\circ + a) = \operatorname{tang} a$, $\operatorname{tang}(180^\circ - a) = \operatorname{tang} a$.

 tang

$\tang(270^\circ + a) = - \cot a.\ \tang(270^\circ - a) = \cot a.$
$\tang(360^\circ + a) = - \tang a.\ \tang(360^\circ - a) = - \tang a.$
$\tang(a - 90^\circ) = - \cot a.\ \tang(a - 180^\circ) = \tang a.$
$\tang(a - 270^\circ) = - \cot a.\ \tang(a - 360^\circ) = \tang a.$

§. 22.

Anmerkung.

Wenn man der leichten Uebersicht wegen alle Winkel zwischen 0 und 90°, Winkel des ersten Quadranten,

Zwischen 90° und 180°, Winkel des zweyten Quadranten,

Zwischen 180° und 270°, Winkel des dritten Quadranten, und endlich die zwischen 270° und 360° enthaltenen, Winkel des vierten Quadranten nennet, so kann man sich folgende leicht zubehaltende Regel, in Betreff der Sinusse, Cosinusse und Tangenten merken, welche aus dem vorigen abgezogen ist.

In dem ersten Quadranten sind alle drey, Sinusse, Cosinusse, und Tangenten nämlich, positiv.

In dem zweyten sind es nur die Sinusse, in dem dritten nur die Tangenten, und in dem vierten nur die Cosinusse, die übrigen zwey sind negativ.

Man kann dieses auch aus der Figur deutlich sehen. Es ist z. B. im ersten und zweyten Quadranten sowohl der Sinus DE als FG positiv; HK und ML aber als Sinusse des dritten und vierten Quadranten haben in Rücksicht der vorigen eine entgegengesetzte Lage, und sind folglich negativ.

Der Cosinus CE, welcher sowohl zum ersten als zum vierten Quadranten gehöret, hat in Ansehung des Cosinus CH, der sowohl zum zweyten als dritten Quadranten gehört, eine entgegengesetzte Lage, folglich ist letzterer negativ, wenn man den ersten positiv annimmt. Eben so hat die Tangente AT', welche zum zweyten und vierten Quadranten gehört, in Ansehung der tang. AT die zum ersten und dritten Quadranten gehöret, eine entgegengesetzte Lage, und muß für negativ genommen werden, wenn jene als positiv angesehen wird.

§. 23.

Lehrsatz.

Der Sinus eines negativen Winkels ist negativ, sein Cosinus aber positiv, das ist, $\sin(-a) = -\sin a$, und $\cos(-a) = \cos a$.

Be-

Beweis.

Man setze $a = \alpha - \beta$, so ist $\sin(-a) = \sin(-(\alpha - \beta)) = \sin(\beta - \alpha) = \sin\beta.\ \cos\alpha - \sin\alpha \cos\beta = -(\sin\alpha.\ \cos\beta - \sin\beta.\ \cos\alpha) = -\sin(\alpha - \beta) = -\sin a$. Eben so ist $\cos(-a) = \cos(-(\alpha - \beta)) = \cos(\beta - \alpha) = \cos\beta.\ \cos\alpha + \sin\beta.\ \sin\alpha = \cos(\alpha - \beta) = \cos a$. w. z. e. w.

§. 24.

Zusatz.

Da $\sin(-a) = -\sin a$, und $\sin(180^\circ - a) = \sin a$ ist, so haben $\sin(-a)$ und $\sin(180^\circ - a)$ entgegengesetzte Zeichen; und das nämliche gilt auch von $\cos(-a)$ und $\cos(180^\circ - a)$, weil $\cos(-a) = \cos a$, und $\cos(180^\circ - a) = -\cos a$ ist (§.21.). So z. B. ist $\sin(-50^\circ) = -\sin 50^\circ$, $\sin(180^\circ - 50^\circ)$ hingegen ist $= \sin 130^\circ = \sin 50^\circ$, $\sin(-200^\circ) = -\sin 200^\circ = \sin 20^\circ$, hingegen ist $\sin(180^\circ - 200^\circ) = \sin(-20^\circ) = -\sin 20^\circ$. $\cos(-50^\circ) = \cos 50^\circ$; aber $\cos(180^\circ - 50^\circ) = \cos 130^\circ = -\cos 50^\circ$, $\cos(-200^\circ) = \cos 200^\circ = -\cos 20^\circ$; aber $\cos 180^\circ - 200^\circ) = \cos(-20^\circ) = \cos 20^\circ$.

§. 25.

Zusatz.

Man setze in (§. 24.) $-W+B$, $-W+B+C$, $-W+B+C+D$ --- anstatt $-a$, so folget, daß auch die Ausdrücke $\sin(-W+B)$ und $\sin(-W+B+180°)$, ferner $\sin(-W+B+C)$ und $\sin(-W+B+C+180°)$, ferner $\sin(-W+B+C+D)$ und $\sin(-W+B+C+D+180°)$, u. s. w. verschiedene Zeichen haben müßen, und eben dieß gilt auch von den Cosinussen, $\cos(-W+B+C)$ z. B. hat das entgegengesetzte Zeichen von $\cos(-W+B+C+180°)$.

§. 26.

Lehrsatz.

Wenn man aus allen Winkelpunkten einer gebrochenen Linie auf eine ihrer Seiten oder deren Verlängerung senkrechte Linien Bb, Cc, Dd --- fället (Fig. 15.), so ist $Bb = AB.\sin A$.

$Cc = AB.\sin A + BC\sin(A+B)$.

$Dd = AB\sin A + BC\sin(A+B) + CD\sin(A+B+C)$.

$Ee = AB\sin A + BC\sin(A+B) + CD\sin(A+B+C) + DE\sin(A+B+C+D)$ u. s. w. das ist, jede Senkrechte ist der Summe der Produkte gleich, welwelche entstehen, wenn man alle zwischen der Grundlinie und dem Punkte, aus welchen die perp. gefället worden ist, enthaltenen Seiten mit dem Sinus eines Winkels multiplizieret, welcher der algebra-

gebraischen Summe aller zwischen so eben genannten Gränzen enthatenen Nebenwinkeln gleich ist.

Beweis.

Man ziehe noch die mit der Grundlinie parallelen Bc′, Cd′, De′, Ef′ - - - so ist, wenn der Sinus totus zu 1 angenommen wird, in dem Dreyecke ABb, $1 : AB = \sin BAB : Bb$, daher ist $Bb = AB \sin BAB'$, $= AB. \sin A$ (§. 21.).

In dem Dreyecke BCc′ ist $1 : BC = \sin CBc' : Cc'$, daher ist $Cc' = BC \sin CBc' = BC \sin B'BC = + BC \sin (A + B)$ (§ 14). Folglich ist auch $Cc = Dc' + c'c = Cc' + Bb = AB \sin A + BC \sin (A + B)$.

In dem Dreyecke CDd′ ist eben so $Dd' = CD \sin DCd' = - CD \sin (180 + DCd')$ (§ 21) $= - CD \sin qq'q'' = - CD \sin (A + B + C)$, (§ 14) und folglich $Dd = Cc - Dd' = AB \sin A + BC \sin (A + B) + CD \sin (A + B + C)$.

In dem Dreyecke DEe′ ist wieder $Ee' = DE \sin EDe' = DE \sin rr'r'' = DE \sin (A + B + C + D)$ (§ 14) daher ist auch $Ee = Ee' + e'e = AB \sin A + BC \sin (A + B) + CD \sin (A + B + C) + DE \sin (A + B + C + D)$ und man siehet den Fortgang des Beweises für die noch übrigen Senkrechten von selbsten ein.

§. 27.

§. 27.

Zusatz.

Aus ganz ähnlichen Gründen kann auch erwiesen werden, daß

$Kk = LK \sin L.$

$Hh = LK \sin L + KH \sin (L + K).$

$Gg = LK \sin L + KH \sin (L + K) + HG \sin (L + K + H).$

$Ff = LK \sin L + KH \sin (L + K) + HG \sin (L + K + H) + GF \sin (L + K + H + G).$

$Ee = LK \sin L + \ldots + FE \sin (L + K + H + G + F).$

u. s. w.

§. 28.

Zusatz.

Man kann demnach jede der genannten Senkrechten durch zwey verschiedene Ausdrücke vorstellen. So z. B. ist $Ee = LK \sin L + KH \sin (L + K) + HG \sin (L + K + H) + GF \sin (L + K + H + G) + FE \sin (L + K + H + G + F)$. (§ 27) $= AB \sin A + BC \sin (A + B) + CD \sin (A + B + C) + DE \sin (A + B + C + D)$ (§ 26).

§. 29.

Zusatz.

Da $L = 36\breve{0} - (A + B + C + D + E + F + G + H + K)$ ist (§ 6), so ist $\sin L = \sin (36\breve{0} - (A + \ldots K) = - \sin (A + B \ldots + K))$ (§ 21). Eben so

weil

weil $L + K = 360^\circ - (A+B+C \ldots + H)$ ist, so ist auch $\sin(L+K) = -\sin(A+B \ldots + H)$. Aus eben diesen Gründen ist auch $\sin(L+K+H) = -\sin(A+B \ldots + G)$, ferner $\sin(L+K+H+G) = -\sin(A+B+ \ldots + F)$ u. s. w. Man substituire diese Werthe in der letzten Gleichung (§ 28), und bringe alle Glieder auf eine Seite, so hat man folgende Gleichung. $AB \sin A + BC \sin(A+B) + CD \sin(A+B+C) + DE \sin(A+B+C+D) + EF \sin(A+B+C+D+E) + FG \sin(A+B+C+D+E+F) + GH \sin(A+B+C+D+E+F+G) + HK \sin(A+B \ldots + H) + KL \sin(A+B \ldots + HK) = 0$.

§. 30.

Lehrsatz.

Bey der nämlichen Voraussetzung wie in (§ 26) ist auch (Fig. 15.)

$Ab = AB.\cos(180^\circ - A)$.

$AC = AB\cos(180^\circ - A) + BC.\cos(180^\circ - (A+B))$

$Ad = AB.\cos(180^\circ - A) + BC\cos(180^\circ - (A+B))$
$+ CD\cos(180^\circ - (A+B+C))$

$Ae = AB.\cos(180^\circ - A) + BC.\cos(180^\circ - (A+B))$
$+ CD\cos(180^\circ - (A+B+C))$
$+ DE\cos(180^\circ - (A+B+C+D))$, und so fort.

Beweis.

In dem Dreyecke ABb ist 1 : AB = cos ABb : Ab, folglich Ab = AB. cos BAb = AB. cos (180° — A).

In dem Dreyecke BCc′ ist 1 : BC = cos CBc′ : Bc′, daher ist Bc′ = BC. cos CBc′ = BC cos (180° — B′BC) = BC cos (180° — (A + B) (§ 14), und AC = AB + Bc′ = AB cos (180° — A) + BC. cos (180° — (A + B)).

Eben so ist in dem Dreyecke CDd′, Cd′ = CD cos DCd′ = CD. cos (180° — (A + B + C)), also Ad = + AC + Cd′ = AB. cos (180° — A) + BC cos (180 — (A + B)) + CD cos (180° — (A + B + C)), und man sieht den Fortgang dieses Beweises leicht von selbst ein.

§. 31.

Zusatz.

Diesem zufolge ist auch AL = AB cos (180° — A) + BC cos (180° — (A + B))
+ CD cos (180° — (A + B + C))
+ DE cos (180° — (A + B + C + D))
+ EF cos (180° — (A + B + C + D + E))
+ FG cos (180° — (A + B + C + D + E + F))
+ GH cos (180° — (A . . . . . + G))
+ HK cos (180° — (A . . . . . + H))
+ KL cos (180° — (A - - - + K)).

Es ist aber $\cos(180° - A) = - \cos A$ (§. 21.) $\cos(180° - (A+B)) = - \cos(A+B)$. $\cos(180° - (A+B+C)) = - \cos(A+B+C)$ u. s. w. Substituieret man diese Werthe in der vorigen Gleichung, und bringt alle Glieder auf eine Seite, so hat man $AL + AB \cos A$

$+ BC \cos(A+B)$

$+ CD \cos(A+B+C)$

$+ DE \cos(A+B+C+D)$

$+ EF \cos(A+B+C+D+E)$

$+ FG \cos(A+B+C+D+E+F)$

$+ GH \cos(A+B+C+D+E+F+G)$.

$+ HK \cos(A+B+C+D+E+F+G+H)$

$+ KL \cos(A+B ---- + H+K) = 0$.

§. 32.

Zusatz.

Aus ähnlichen Gründen ist auch auf der anderen Seite

$AL + LK \cos L$

$+ KH \cos(L+K)$

$+ HG \cos(L+K+H)$.

$+ GF \cos(L+K+H+G)$

$+ FE \cos(L+K+H+G+F)$

$+ ED \cos(L+K+H+G+F+E)$

$+ DC \cos(L+K+H+G+F+E+D)$

$+ BA$

$+ CB \cos(L + K - - - - + D + C)$
$+ BA \cos(L + K - - - - + C + B) = 0.$

§. 33.

Anmerkung.

Alles was in den (§§. 26, 27 . . . 32) gesagt worden ist, gilt auch noch, wenn die senkrechten Linien Aa, Ab, Cc. . . nicht (wie bisher angenommen worden ist) auf einer der Seiten der Figur oder ihrer Verlängerung, sondern auf einer andern Linie z. B. MN (Fig. 16.) stehen, welche was immer für einen Winkel α mit einer Seite der Figur einschließet, wenn man nur überall α anstatt A, und β anstatt der vorigen K, L, H oder sonstigen Winkels setzet. So z. B. ist $Ee = AB \sin \alpha + BC \sin(\alpha + B) + CD \sin(\alpha + B + C) + DE \sin(\alpha + B + C + D) =$
$AG \sin \beta + GF \sin(\beta + G) + EF \sin(\beta + G + F)$, wenn nämlich ABC für positiv genommen wird. Und eben so ist z. B. $Ad = AB \cos(180° - \alpha) + BC. \cos(180° - (\alpha + B)) + CD. \cos(180° - (\alpha + B + C))$.
$= AG. \cos(180° - \beta) + GF \cos.(180° - (\beta + G)) + EF \cos(180° - (\beta + G + F)) + ED. \cos(180° - (\beta + G + F + E))$. Man kann sich von der Wahrheit dieses Satzes überzeugen, wenn man sich an das, was in (§. 18.)

15.) gesagt worden ist, erinnert, und die in dem (§§. 26 . . . 32.) gegebenen Beweise fast wörtlich wiederholet.

§. 34.

Aufgabe.

Alle Seiten und Winkel eines Poligons oder einer sonstigen gebrochenen Linie (Fig. 17. u. 18.) sind in Zahlen gegeben, man soll diese auf dem Papier zeichnen.

Auflösung.

Man denke sich aus allen Winkeln der Figur, auf einer ihrer Seiten oder ihrer Verlängerung, oder auch auf einer nach Willkühr angenommenen Linie NM, welche mit der Linie AB einen beliebigen Winkel α einschließet, (Fig. 18.) senkrechte Linien gezogen; berechne nach (§. 26. und 30.) alle diese Senkrechten Bb, Cc, Dd .... wie auch ihre Entfernungen von A, nämlich Ab, Ac, Ad, Ae .... trage alle gefundene positive Entfernungen auf der AL (Fig. 17.) oder MN (Fig. 18.) von A nach der Rechten, und die negativen von A nach der Linken, wenn die Linie AB von der LA, so, wie die Figur zeiget, nach der Rechten abweichet; widrigenfalles ist es umgekehrt. In allen diesen Punkten b, c, d.... durchschneide man die AL oder MN (ich werde sie künftighin die Grundlinie

nen-

nennen) durch unbestimmte senkrechte Linien, auf diese trage man alle positive aufwärts, und alle negative abwärts, und ziehe die Endpunkte derselben zusammen; so ist geschehen, was verlangt worden ist.

Es seyen z. B. die in dem Manual eingetragenen Winkel und Seiten folgende: (Fig. 17.).

AB = 84, BC = 54, CD = 97.
DE = 140, EF = 98, FG = 122.
GH = 72, HK = 174, KL = 94, 292.
LA = 64, 235, ferner

LAB = + 126°, so ist	A = + 54°.
ABC = — 154°	B = — 26°.
BCD = + 126°	C = + 54°.
CDE = + 71°	D = + 109°.
DEF = + 145°	E = + 35°.
EFG = — 121°	F = — 59°.
FGH — + 136°	G = + 44°.
GHK = + 75°	H = + 105°.
HKL = + 112°	K = + 68°.
KLA = — 156°	L = — 24°, und
A + B = 28°	180° — (A + B) = 152°.
A + B + C = 82°	180° — (A .. C) = 98°.
A . . D = 191°	180° — (A .. D) = — 11°.
A . . E = 226°	180° — (A .. E) = — 46°.
A . . F = 167°	180° — (A .. F) = 13°.

A..

A . . G = 211° so ist 180° — (A . . G) = — 31°.
A . . H = 316° 180° — (A . . H) = — 136.
A . . K = 384° 180° — (A . . K) = — 204°,
und die Rechnung siehet ungefähr so aus, nämlich:

Log AB	= 1,9242793	
Log sin 54°	= 9,9079576	— 10
Log prod	= 1,8322369	
Bb	= + 67,951	
Log BC	= 1,7323938	
Log sin 28°	= 9,6716093	— 10
Log prod	= 1,4040031	
prod	= + 25,357	
Bb	= + 67,951	
Cc	= + 93,308	
Log CD	= 1,9867717	
Log sin 82°	= 9,9957528	— 10
Log prod	= 1,9825245	
prod	= + 96,056	
Cc	= + 93,308	
Dd	= + 189,364	
Log DE	= 2,1461280	
Log sin 191°	= 9,2805988	— 10
Log prod	= 1,4267268	

prod

prod	=	−	26,713
Dd	=	+	189,364
Ee	=	+	162,651
Log EF	=		1,9912261
Log ſin 226°	=		9,8569341 − 10
Log prod	=		1,8481602
prod	=	−	70,495
Ee	=	+	162,651
Ff	=	+	92,156
Log FG	=		2,0863598
Log ſin 467°	=		9,3520880 − 10
Log prod	=		1,4384478
prod	=	+	27,444
Ff	=	+	92,156
Gg	=	+	119,600
Log GH	=		1,8573325
Log ſin 211°	=		9,7118393 − 10
Log prod	=		1,5691718
prod	=	−	37,083
Gg	=	+	119,600
Hh	=	+	82,517
Log HK	=		2,2405492
Log ſin 316°	=		9,8417713 − 10
Log prod	=		2,0823205

prod	= —	120,870
Hh	= +	82,517
Kk	= —	38,353

Log KL	=	1,9744748
Log sin 384°	=	9,6093133 — 10
Log prod	=	1,5837881
prod	= +	38,353
Kk	= —	38,353
Ll	=	0.

Log AB	=	1,9242793
Log cos 126°	=	9,7692187 — 10
Log prod	=	1,6934980
Ab	= —	49,374.

Log BC	=	1,7323938
Log cos 152°	=	9,9459349 — 10
Log prod	=	1,6783287
prod	= —	47,679
Ab	= —	49,374
Ac	= —	97,053.

Log CD	=	1,9867717
Log cos 98°	=	9,1435553 — 10
Log prod	=	1,1303270

prod

prod = − 13,500
Ac = − 97,053
Ad = − 110,553.

Log DE . = 2,1461280
Log cos (−11°) = 9,9919466 − 10
Log prod = 21380746
prod = + 137,428
Ad = − 110,553
Ae = + 26,875.

Log EF = 1,9912261
Log cos (−46°) = 9,8417713 − 10
Log prod = 1,8329974
prod = + 68,077
Ae = + 26,875
Af = + 94,952

Log FG = 2,0863598
Log cos 13° = 9,9887239 − 10
Log prod = 2,0750837
prod = + 118,873
Af = + 94,952
Ag = + 213,825.

Log GH = 1,8573325
Log cos (−31°) = 9,9330656 − 10
Log prod = 1,7903981

prod = + 61,716
Ag = + 213,825
Ah = + 275,851.

Log HK = 2,2405492
Log co(−136°) = 9,8569341 − 10
Log prod = 2,0974833
prod = − 125,166
Ah = + 275,541
Ak = + 150,375

Log KL = 1,9744748
Log cos(−204°) = 9,9607302 − 10
Log prod = 1,9352050
prod = − 86,140
Ak = + 150,375
AL = + 64,235.

Und nun werden die gefundenen Grössen Ab, Ac, und Ad; weil diese negativ gefunden worden sind, von A nach der linken zu, (wenn man nämlich das Papier, worauf die Figur gezeichnet werden soll, so vor sich liegen hat, daß die darauf gezogene Grundlinie AL mit der Brust parallel ist) die übrigen Linien aber, weil sie positiv gefunden worden sind, werden von A nach rechts getragen, und eben so werden Bb, Cc, Dd u. s. w. bis auf die

einzige Kk, welche negativ gefunden worden ist, nach aufwärts, leztere aber abwärters getragen.

§. 35.

Anmerkung.

Die leztere Rechnung, um AL zu finden, ist zwar in der Voraussetzung, daß alle Seiten bekannt sind, überflüßig; es ist aber doch immer rathsam, sie nicht hinweg zu lassen, weil sie zur Probe dienet, ob man sich im Rechnen nicht verstossen habe; denn wenn alles richtig gerechnet ist, so muß AL, der Voraussetzung gemäß, und Ll = o werden.

§. 36.

Anmerkung.[1]

Man pflegt gewöhnlich die vorige Aufgabe nach zwey anderen Arten aufzulösen. Die erste bestehet darin, daß man alle Seiten und Winkel, so wie man diese in dem Manual aufgezeichnet findet, unmittelbar und ohne weitere Rechnung nur durch Hilfe eines Maaßstabes und krumm- oder geradelinichten Transporteurs auf das Papier trägt. Was von dieser Auflösungsart für eine Richtigkeit zu hoffen ist, das weiß auch sogar der bloß mechanische Geometer aus Erfahrung. Selten oder nie-

mals

mals schließet sich die Figur gehörig; weil auch nur ein einziger, bey dem Auftragen eines Winkels begangener unvermeidlicher Fehler, alle übrige Winkel und Seiten aus ihrer gehörigen Lage verrücket.

Die zweyte zwar mühesamere; aber auch um vieles richtigere Auflösungsart bestehet darin, daß man sich die ganze Figur durch Diagonalen in Dreyecke zerlegt einbildet; alle diese Diagonalen trigonometrisch berechnet, und ein Dreyeck nach dem andern durch Hilfe dieser Diagonalen und der bekannten Seiten, auf den Diagonalen aufträgt. Allein auch diese Art ist nicht ganz von den vorhin genannten Fehlern frey; auch hier pflanzet sich jeder bey der Bildung eines Dreyeckes begangener Fehler, der bey sehr spitzigen Dreyecken unvermeidlich ist, auf alle übrige Dreyecke fort, verrücket sie aus ihrer gehörigen Lage, und die ganze Figur wird derjenigen, welche auf dem Felde gemessen worden ist, unähnlich, der mühevollen Rechnungen zu geschweigen, die man zur Auffindung der Diagonalen nöthig hat, und die nach gar keinen leicht zu übersehenden Gesetze angestellet werden kann; besonders wenn die Figur viele eingehende Winkel hat. In diesem Falle muß man auch schon vorhin, ehe man zur Rechnung schreitet, die ganze Figur wenigstens,

bey=

beyläufig gezeichnet, vor sich haben, um nicht in den Diagonalen und Winkeln irre zu werden. Ich glaube daher nicht zuviel zu sagen, wenn ich behaupte, die von mir oben beschriebene Auflösungsart sey von allen ebengenannten Fehlern und Unbequemlichkeiten frey, und in allen Fällen die brauchbareste; weil sie auch die Probe von der Richtigkeit der ganzen Rechnung an die Hand giebt. (§. 35.)

§. 37.

Lehrsatz.

Die Tangente eines Poligonwinkels, oder auch einer sonst in sich selbst zurücklaufenden gebrochenen Linie, ist einem Bruche gleich, dessen Zäher die Summe aller Produkte ist, welche entstehen, wenn man alle Seiten der Figur (die zwey den besagten Winkel einschließende Seiten ausgenommen) durch den Sinus eines Winkels multiplizieret, welcher der algebraischen Summe aller zwischen diesen Seiten und dem besagten Winkel enthaltenen Nebenwinkeln gleich ist; der Nenner aber aus einer, der so eben genannten, ähnlichen Summe bestehet, wenn man nämlich die Cosinusse anstatt der Sinusse der Winkel in die Rechnung bringet, und zu dieser Summe noch den einen Schenkel des besagten Winkels addiret. Das ist z. B. (Fig. 17.) tang LAB =

BC

$$\left\{\begin{array}{l}
BC \sin B + \\
CD \sin (B + C) + \\
DE \sin (B + C + D) + \\
EF \sin (B + C + D + E) + \\
FG \sin (B + C \text{ - - - - - - - - - } + F) + \\
GH \sin (B \text{ - - - - - - - - - - - } + G) + \\
HK \sin (B \text{ - - - - - - - - - - - } + H) + \\
KL \sin (B \text{ - - - - - - - - - - - } + K)
\end{array}\right\} +$$

$$\left\{\begin{array}{l}
AB + BC \cos B + \\
CD \cos (B + C) + \\
DE \cos (B + C + D) + \\
EF \cos (B + C + E) + \\
FG \cos (B + \text{ - - - } F) + \\
GH \cos (B \text{ - - - } + G) + \\
HK \cos (B \text{ - - - - } H) + \\
KL \cos (B \text{ - - - - } K)
\end{array}\right\}$$

Beweis.

Nach (§. 29.) ist $AB \sin A + BC \sin (A+B) + CD \sin (A + B + C) + DE \sin (A + B + C + D) + EF \sin (A \ldots E) + FG \sin (A \ldots F) + GH \sin (A \ldots G) + HK \sin (A \ldots H) + KL \sin (A \ldots K) = 0$.

Es ist aber, wenn man in (§. 21.) $\alpha = A$, und $\beta = B + C$, $B + C + D$, $B + C + D + E$, u. s. w. setzet

$\sin(A+B) = \sin A . \cos B + \sin B . \cos A.$

$\sin(A+B+C) = \sin A . \cos(B+C) + \sin(B+C) . \cos A.$

$\sin(A+B+C+D) = \sin A . \cos(B+C+D) + \sin(B+C+D) . \cos A.$

$\sin(A \ldots\ldots + E) = \sin A . \cos(B + \ldots\ldots E) + \sin(B + \ldots\ldots E) . \cos A$, u. s. w.

Werden nun diese Werthe in die vorige Gleichung gesetzt, alle Glieder, welche mit sin A multiplieret sind, auf die eine, und alle Glieder, die mit Cos. A multiplizieret sind, auf die andere Seits gebracht, so erhält man folgende Gleichung.

$$\sin A \left\{ \begin{array}{l} AB + BC . \cos B + CD . \cos(B+C) \\ + DE \cos(B+C+D) \\ + EF \cos(B+C+D+E) \\ + FG \cos(B + - - F) \\ + GH . \cos(B + - - G) \\ + HK . \cos(B + - - H) \\ + KL . \cos(B + - - K) \end{array} \right\} =$$

$$- \cos A \left\{ \begin{array}{l} BC \sin B + CD \sin(B+C) \\ + DE \sin(B+C+D) \\ + EF \sin(B+C+D+E) \\ + FG \sin(B + - - - F) \\ + GH \sin(B + - - - G) \\ + HK \sin(B + - - - H) \\ + KL \sin(B + - - - K) \end{array} \right\}$$

Divi-

Dividiret man diese Gleichung durch cos A, und erinneret sich, daß sin A : cos A = tang A ist (§. 21.), so erhält man nach gehöriger Absönderung

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} BC \sin B + CD \sin (B + C) \\ + DE \sin (B + C + D) \\ + EF \sin (B + C + D + E) \\ + FG \sin (B + C + D + E + F) \\ + GH \sin (B + C - - - - G) \\ + HK \sin (B + - - - - - H) \\ + KL \sin (B + - - - - - K) \end{array}\right\}}{\left\{\begin{array}{l} AB + BC \cos B + CD. \cos (B + C) \\ + DE. \cos (B + C + D) \\ + EF. \cos (B + C + D + E) \\ + FG. \cos (B + C + D + E + F) \\ + GH. \cos (B + - - - G) \\ + HK. \cos (B + - - - H) \\ + KL. \cos (B + - - - K) \end{array}\right\}} = -\text{tang} A.$$

$$= \text{tang} (180^\circ - A) = \text{tang} LAB \text{ (§. 21.).}$$

§. 38.

Anmerkung.

Es verstehet sich von selbst, daß, wenn einige Winkel, als B, F, L (Fig. 17.), oder C, E, F und G (Fig. 16.) eingehende sind, man diese in die Rechnung als negativ ansehen müße, so wie in dem gegebenen Beyspiel in (§. 34.) geschehen ist.

§. 39.

§. 39.

Anmerkung.

Man setze: der Winkel BAL, dessen Tangent in (§. 37.) gefunden worden ist, sey ein eingehender Winkel, so leidet der dortige Kalkul einige Aenderung. Mau muß nämlich überall — A anstatt + A setzen, und man bekommt endlich den nämlichen Ausdruck für Tang A, den man vorhin für Tang LAB gefunden hat. Man muß demnach aus andern Umständen der Aufgabe schließen, ob der Winkel, welcher der in Zahlen gefundenen Tangente entspricht, ein ausgehender Poligonswinkel selbst, oder ob er der Nebenwinkel eines eingehenden Poligonswinkels ist, und mithin das Supplement des gefundenen zu 180° zu nehmen ist. Ich werde weiter unten einige Fälle entwickeln, und in Beyspielen zeigen, wie man sich hierin zu verhalten habe.

Ob übrigens der gefundene Winkel spitzig oder stumpf genommen werden müße, hierüber kann kein Zweifel entstehen; denn ist die in Zahlen gefundene Tangente positiv, so entspricht sie einem spitzigen; ist sie aber negativ, so entspricht sie einen stumpfen Winkel (§. 21.).

§. 40.

§. 40.

Anmerkung.

Der Nutzen der bisher vorgetragenen Sätze zeiget sich bey Auflösung und Berechnung der Poligonen. Wenn nämlich alle Seiten und Winkel eines Poligons gegeben sind, drey Stücke ausgenommen (jedoch dürfen diese drey unbekannte Stücke nicht lauter Seiten seyn) so können diese durch das bisher vorgetragene leicht gefunden werden: Ich werde dieses im folgenden durch arithmetische Beyspiele zeigen.

§. 41.

Aufgabe.

Es seyen die drey unbekannten Stücke eines Poligons, zwey Seiten und ein Winkel, z. B. (Fig. 17.) AL, DE, und FGH, alle übrige Seiten und Winkel sind bekannt. Man soll jene drey finden.

Auflösung.

Den Winkel findet man nach (§. 8.) und die Seiten nach den (§§. 28. u. 39.). Es sey z. B. in (Fig. 17.) so wie in (§. 31.) angenommen worden ist

AB = 84°, BC = 54, CD = 97
EF = 98, FG = 122, GH = 72,
HK = 174, KL = 94,292, ferner

LAB	= + 126°	so ist	A	= +	54°.
ABC	= — 154°		B	= —	26°.
BCD	= + 126°		C	= +	54°.
CDE	= + 71°		D	= +	109°.
DEF	= + 145°		E	= +	35°.
EFG	= — 121°		F	= —	59°.
GHK	= + 75°		H	= +	105°.
HKL	= + 112°		K	= +	68°.
KLA	= — 156°		L	= —	24°.

Nun ist hier n = 10, m = 3, S = 224°, also S > 180° (n — 2m — 3), daher ist x = FGH = 180° (n — 2m — 2) — S = 360° — 224° = + 136°, also FGH ein ausgehender Winkel von 136°. Das nämliche hätte man auch noch (§. 9.) finden können; denn da die Summe aller bekannten Nebenwinkel = 425° — 109° = 316° ist, so ist G = 360° — 316° = 44°. und folglich FGH = 180° — 44° = 136°.

Man denke sich aus einem Winkelpunkte einer der unbekannten Seiten z. B. aus D eine auf der andern unbekannten Seite AL senkrechte Dd, so hat man noch (§. 28.) folgende Gleichung.

AB

$AB \sin A + BC \sin(A+B) + CD \sin(A+B+C) =$
$LK \sin L + KH \sin(L+K) + HG \sin(L+H+H) +$
$GF \sin(L+K - - - - - - - - + G) + FE \sin(L+K$
$- - - - - F) + ED \sin(L+ - - - E).$

In dieser Gleichung sind alle Glieder bis auf das letzte bekannt, folglich kann dieses durch die Absönderung, und endlich auch DE durch die Division mit $\sin(L+K - - - - E)$ gefunden werden, die Rechnung sieht ungefähr so aus:

$A = 54°, A+B = 28°, A+B+C = 82°$
$L = -24°, L+K = 44°, L+K+H = 149,$
$L+K+H+G = 193° \; L+K+H+G+F = 134°,$
$L+K+H+G+F+E = 199°.$

Log AB	=	1,9242793
Log sin 54°	=	9,9079576 — 10
Log prod	=	1,8322369
Prod	=	+ 67,957

Log BC	=	1,7323938
Log sin 28°	=	9,6716093 — 10
Log prod	=	1,4040031
prod	=	+ 25,351

Log

Log CD = 1,9867717
Log sin 82° = 9,9957528 — 10
Log prod = 1,9825245
prod = + 96,056

Log LK = 1,9744748
Log sin (—24°) = 9,6093133 — 10
Log prod = 1,5837881
prod = — 38,353

Log KH = 2,2405492
Log sin 44° = 9,8417713 — 10
Log prod = 2,0823205
prod = + 120,870

Log HG = 1,8573325
Log sin 149° = 9,7118393 — 10
Log prod = 1,5691718
prod = + 37,083

Log GF = 2,0863598
Log sin 193° = 9,3520880 — 12
Log prod = 1,4384478
prod = — 27,444.

Log FE $= 1{,}9912261$
Log sin 134° $= 9{,}8569341 - 10$
Log prod $= 1{,}8481602$
Prod $= - 70{,}495.$

Folglich ist $67{,}957 + 25{,}351 + 96{,}056 = - 38{,}353 + 120{,}870 + 37{,}082 - 27{,}444 + 70{,}495 +$ DE sin 169°, d. i. $26{,}713 =$ DE sin 169, folglich ist DE $= 26{,}713$: sin 169°.

Log 26,713 $= 1{,}4267227$
Log sin 169° $= 9{,}2805988 - 10$
Log Quot. $= 2{,}1461239$
Quot. $= + 139{,}9998$, das ist, DE $= 140$ sehr nahe.

Ferner ist nach (§. 31.) AL + AB. cos A + BC. cos (A+B) + CD. cos (A+B+C) + DE. cos (A+B+C+D) + ------ + ------ + KL cos (A+B------+K) = 0. Es ist aber A = 54°, A+B = 28°, A+B+C = 82°, A+B+C+D = 191°, A+B+C+D+E = 226°, A+---- F = 367, A+B----G) = 211°, A+B----H = 316°, A+B----K = 384°.

Log AB $= 1{,}9242793$
Log cos 54° $= 9{,}7692187 - 10$
Log prod $= 1{,}6934980$
prod $= + 49{,}374$

Log

Log BC = 1,7323938
Log cos 28° = 9,9459349 — 10
Log prod = 1,6783287
prod = + 47,679

Log CD = 1,9867717
Log cos 82° = 9,1435553 — 10
Log prod = 1,1303270
prod = + 13,500

Log DE = 2,1461280
Log cos 191° = 9,9919466 — 10
Log prod = 2,1380746
prod = — 137,428

Log EF = 1,9912261
Log cos 226° = 9,8417713 — 10
Log prod = 1,8329374
prod = — 68,077

Log FG = 2,0863598
Log cos 167° = 9,9887239 — 10
Log prod = 2,0750837
prod = — 118,873

Log GH = 1,8573325
Log cos 211° = 9,9330656
Log prod = 1,7903981
prod = — 61,716

Log HK	=	2,2405492
Log cos 316°	=	9,8569341 — 10
Log prod	=	2,0974833
prod	=	+ 125,166.

Log KL	=	1,9744748
Log cos 384°	=	9,9607302 — 10
Log prod	=	1,9352050
prod	=	86,140.

Daher ist endlich AL + 49,374 + 47,679 + 13,500 — 137,428 — 68,077 — 118,873 — 61,716 + 125, 166 + 86,140 = 0, das ist, AL = 64,235.

§. 42.

Anmerkung.

Wem diese gegebene Auflösung zu weitläufig scheinen sollte, der beliebe nur dieselbe auf gewöhnliche Weise trigonometrisch aufzulösen, und beyde Rechnungen gegeneinander zu halten, so wird er gewiß von seinem Irrthume überführet werden, und dieser Auflösung nicht nur des um vieles kürzern, sondern auch leicht faßlichern Ganges der ganzen Rechnung wegen, gerne den Vorzug einräumen: ja der gegebene Fall, wo nämlich die zwey unbekannten Seiten nicht unmittelbar aufeinander folgen, ist nicht einmal trigonometrisch aufzulösen möglich.

Daß man übrigens sich auch dieser Auflösung bedienen könne, wenn in der Aufgabe (§. 11.) auch noch die Entfernung FG zu finden verlangt wird, dieses bedarf keiner Erinnerung, nur verstehet es sich, daß man alsdann auch die Linien AB, BC, CD ---- (Fig. 5. u. 6.) messen müße.

§. 43.

Aufgabe.

Es seyen die drey unbekannten Stücke des Poligons, zwey Winkel und eine Seite; man soll dieselben finden.

Auflösung.

Diese in ihrer ganzen Allgemeinheit vorgetragene Aufgabe, enthält drey Fälle in sich. Entweder liegen die zwey unbekannten Winkel an der unbekannten Seite oder nicht, und im letzten Falle folgen entweder die beyden Winkel unmittelbar aufeinander oder nicht; jeder dieser drey Fälle erfordert eine andere Auflösung.

Erster Fall.

Wenn die beyden Winkel, die an der unbekannten Seite anliegenden sind. Es sey z. B. (Fig. 17.) die Seite CD nebst den daranliegenden Winkeln BCD und CDE zu finden.

Der eine Winkel wird nach (§. 37.), der andere nach (§. 8.), und die Seite nach (§. 31. oder (§. 28.) gefunden. Die Rechnung stehet ungefähr so:

AB = 84, BC = 54, DE = 140, EF = 98, FG = 122, GH = 72, HK = 174, KL = 94,292, LA = 64,235.

LAB	= + 126°,	A = +	54°
ABC	= − 154°	B = −	26°
DEF	= + 145°	E = +	35°
EFG	= − 121°	F = −	59°
FGH	= + 136°,	G = +	44°
GHK	= + 75°	H = +	105°
HKL	= + 112°	K = +	68°
KLA	= − 156°	L = −	24°.

$$\mathrm{Tang\,CDE} = \left\{\begin{array}{l} EF \sin E = FG \sin (E+F) \\ + GH \sin (E \ldots . G) \\ + HK \sin (E \ldots . H) \\ + KL \sin (E \ldots . K) \\ + LA \sin (E \ldots . L) \\ + AB \sin (E \ldots . A) \\ + BC \sin (E \ldots . B) \end{array}\right\} :$$

DE

$$\left\{\begin{array}{l} DE + EF \cos E + FG. \cos(E+F) \\ + GH. \cos(E + F + G) \\ + HK. \cos(E \ldots . H) \\ + KL. \cos(E \ldots . K) \\ + LA. \cos(E \ldots . L) \\ + AB. \cos(E \ldots . A) \\ + BC. \cos(E \ldots . B) \end{array}\right\}$$

$E = 35°$, $E + F = -24°$, $E + F + G = 20°$, $E + F + G + H = 125°$, $E + \ldots K) = 193°$, $E + \ldots L = 169°$, $E + \ldots A = 223°$, $E \ldots B + 197°$.

Log EF	=	1,9912261
Log fin 35°	=	9,7585913 — 10
Log prod	=	1,7498174
prod	=	+ 56,210
Log FG	=	2,0863598
Log fin (—24°)	=	9,6093133 — 10
Log prod	=	1,6956731
prod	=	— 49,612
Log GH	=	1,8573325
Log fin 20°	=	9,5340517 — 10
Log prod	=	1,3913842
prod	=	+ 24,626

Log

Log HK	=	2,2405492
Log ſin 125°	=	9,9132645 — 10
Log prod	=	2,1539137
prod	=	+ 142,532
Log KL	=	1,9744748
Log ſin 193°	=	9,3520880 — 10
Log prod	=	1,3265628
prod	=	— 21,211
Log LA	=	1,8077717
Log ſin 169°	=	9,2805988 — 10
Log prod	=	1,0883705
prod	=	+ 12.257
Log AB	=	1,9242793
Log ſin 223°	=	9,8337833 — 10
Log prod	=	1,7580606
prod	=	— 57,288
Mog BC	=	1,7323938
Fog ſin 197°	=	9,4659353 — 10
Log prod	=	1,1983291
prod	=	— 15,788.

Log EF	=	1,9912261
Log cos 35°	=	9,9133645 — 10
Log prod	=	1,9045906
prod	=	+ 80,277
Log FG	=	2,0863598
Log cos (—24°)	=	9,9607302 — 10
Log prpd	=	2,0470900
prod	=	+ 111,453
Log GH	=	1,8573325
Log cos 20°	=	9,9720858 — 10
Log prod	=	1,8803183
prod	=	+ 67,658
Log HK	=	2,2405402
Log cos 125°	=	9,7585913 — 10
Log prod	=	2,9991405
prod	=	— 99,802
Log KL	=	1,9L44748
Log cos 193°	=	9,9887239 — 10
Log prod	=	1,9631987
prod	=	— 91,875
Log LA	=	1,8077717
Log cos 169°	=	9,9919466 — 10
Log prod	=	1,7997183
prod	=	— 63,055

Log

Log AB	=	1,9242793
Log cos 223°	=	9,8641275 — 10
Log prod	=	1,7885068
prod	=	— 61,434

Log BC	=	1,7323938
Log cos 197°	=	9,9805963 — 10
Log prod	=	1,7129901
prod	=	— 51,641, also ist

Tang CDE = (50,210 — 49,622 + 24,626 + 142,532 — 21,311 + 12,257 — 57,288 — 788): (140 + 80'277 + 111,453 + 67,658 — 99,802 — 91,875 — 63.055 — 61,434, — 81,641).

Das ist, Tang CDE = $\frac{91,716}{31,881}$.

Log 91,716	=	1,9624546
Log 31,581	=	1,4884259
Log Quot.	=	10,4630287. Diesem

Log Tang entspricht der Winkel von 71° Graden (109 Grade kann nicht statt haben, weil die Tangente positiv ist (§. 29.) also ist CDE = 71°, und daraus erhält man ferner nach (§. 8.) BCD = 126°.

Um noch CD zu finden, setze man ferner (§. 51.). CD + DE cos D + EF. cos (D + E) + - - - - + - - - - + - - - - BC. cos (D + E - - - - B) = o, und es ist hier

hier D = 109°, D + E = 144°, D + E + F = 85°, D + E - - - - G) = 129°, D + - - - - H = 234°, D + - - - - R) = 302°, D + - - - - L) = 278°, D + - - - - A) = 332°, D - - - - B = 306°.

Log DE	= 2,1461280
Log cos 109°	= 9,5126419 — 10
Log prod	= 1,6587699
prod	= — 45,580
Log EF	= 1,9912261
Log cos 144°	= 9.9079576 — 10
Log prod	= 1,8991837
prod	= — 79,284
Log FG	= 2,0863598
Log cos 85°	= 8,9402960 — 10
Log prod	= 1,0266558
prod	= + 10,633
Log GH	= 1,8573325
Log cos 129°	= 9,7988718 — 10
Log prod	= 1,6562043
prod	= — 45,311
Log HK	= 2,2405492
Log cos 234°	= 9,7692187 — 10
Log prod	= 2,0097679
prod	= — 102,275

Log

Log KL	=	1,9744748
Log cos 302°	=	9,7242097 — 10
Log prod	=	1,6986845
prod	=	+ 49,967
Log LA	=	1,8077717
Log cos 278°	=	9,1435553 — 10
Log prod	=	0,9513270
prod	=	+ 8,939
Log AB	=	1,9242793
Log cos 332°	=	9,9459349 — 10
Log prod	=	1,8702142
prod	=	+ 74,168
Log BC	=	1,7323938
Log cos 306°	=	9,7692187 — 10
Log prod	=	1,5016125
prod	=	+ 31,740.

Daher ist CD — 45,580 — 79,284 + 10,633 — 45,311 — 102,275 + 49,967 + 8,939 + 74,168 + 31,740 = 0, oder endlich CD = 97,003, welcher von dem in (§. 34.) angenommenen Werthe 97 nur um 0,003 also nicht einmal $\frac{1}{32000}$ des Ganzen abweichet, welches theils von der Unvollkommenheit der Tabellen, theils auch davon herrühret, weil man

man die Rechnung nur bis auf drey Dezimalstellen geführet hat.

§. 44.

Anmerkung.

Es ist zwar aus der Beschaffenheit der gefundenen Tangente, nach dem dieselbe entweder positiv oder negativ gefunden worden, die Beschaffenheit des entsprechenden Winkels, ob er nämlich spitzig oder stumpf ist, nach (§. 21. u. 22.) leicht zu entscheiden, wie schon in (§. 39.) erinnert worden ist; ob aber dieser gefundene Winkel, ein ausgehender Poligonswinkel selbst, oder ob er der Nebenwinkel eines eingehenden Poligonswinkels sey, dieses kann aus der blossen Formel (§. 37.) nicht beurtheilet werden; weil die Tangenten beyder Winkel, sowohl ihrer Größe als Beschaffenheit nach, einerley sind (§. 39.). Allein der Zweifel wird gleich gehoben, sobald man nur noch die unbekannte Seite nach der einen oder der andern Voraussetzung berechnet hat; denn da diese immer positiv seyn muß, so kann man sicher schließen, daß das Gegentheil von demjenigen, was bey der Berechnung der unbekannten Seite zum Grund gelegt worden ist, statt hat, wenn die unbekannte Seite negativ gefunden wird.

Man

Man kann sich von der Wahrheit dieses Sakes aus folgenden Gründen überzeugen. Es sey der gesuchte Poligonswinkel = P, und sein Nebenwinkel = N, feiner sey der Winkel, welcher der gefundenen Tangente entspricht = W, so ist entweder W = P, oder W = — N, (§. 39.), da aber P = 180° — N ist, so ist entweder W = 180° — N, oder W = — N, oder welches einerley ist, entweder ist N = 180° — W, oder es ist N = — W. Da nun alle Glieder der Formel, durch welche die unbekannte Seite bestimmet ward, durch die Cosinusse der Nebenwinkel N, N + A, N + A, + B, N + A + B + C .... oder durch ihre Sinusse (§. 28. u. 31.) multiplizieret sind, und die Sinusse und Cosinusse dieser Winkel, welche man bekommt, wenn man — W anstatt N setzt, das entgegengesetzte Zeichen von demjenigen haben, welches man erhaltet, wenn 180° — W anstatt N gesetzt wird (§. 24. u. 25.); so müßen unstreitig alle diese, die unbekannte Seite bestimmende Theile, welche auf der Voraussetzung N = — W sich gründen, positiv seyn, wenn sie in der Voraussetzung N = 180° — W negativ sind, und so umgekehrt müßen sie negativ gefunden werden, wenn sie in letzterer Voraussetzung positiv sind.

§. 45.

Anmerkung.

Außer diesem giebt es noch drey Fälle, in welchen die Lage des gefundenen Winkels keinen Zweifel unterworfen ist.

Erstens, wenn die Summe aller übrigen bekannten Nebenwinkel kleiner als $180° + W$ ist, so ist der gefundene Winkel W ein ausgehender Poligonswinkel selbst, und nicht etwa der Nebenwinkel eines eingehenden; denn wenn man den zweyten unbekannten Winkel $= M$, und die Summe aller bekannten Nebenwinkel $= 180° + W - \alpha$ setzet, so hat man in dem Falle, daß $N = - W$ wäre, $180° + W - \alpha + M - W = 360°$ (§. 9.), und daraus würde man erhalten $M = 180° + \alpha$, also $M > 180°$, welches der in (§. 4.) gegebenen Erklärung widerspreche.

Zweytens, wenn die vorhin genannte Summe $S > 360 + W$ ist, so ist der gefundene Winkel W der Nebenwinkel eines eingehenden; denn man setze $S = 360° + W + \alpha$, so hat man in dem Falle, daß W der Poligonswinkel selbst ist, $360° + W + \alpha + M + 180° - W = 360$ (§. 9.), aus welcher Gleichung $M = -(180° + \alpha)$ folgen würde.

würde. Dieß hieße, M sey ein Nebenwinkel eines eingehenden Poligonswinkels der größer als 180° ist, welches wiederum der Erklärung (§. 4.) entgegen ist.

Drittens, wenn aus den Umständen der Aufgabe oder sonst bekannt ist, daß die beyden unbekannten Winkel einerley Lage haben (§. 1.), so kann ebenfalls wegen ihrer Beschaffenheit kein Zweifel entstehen; denn es sey die Summe der bekannten Nebenwinkel $= S$, und die Summe der beyden noch unbekannten Winkel $= V$, so ist $S + V = 360°$ (§. 9.) also $V = 360° - S$, ist nun $S < 360°$, so ist V positiv, das heißt, die beyden unbekannten Nebenwinkel sind Nebelwinkel von ausgehenden Poligonswinkeln, und folglich ist der, der gefundenen positiven oder negativen Tangent, entsprechende Winkel W ein ausgehender Poligonswinkel selbst; ist aber $S > 360$, so ist V negativ, die beyden unbekannten Nebenwinkel gehören folglich zu eingehenden Poligonswinkeln, und der gefundene W ist der Nebenwinkel eines eingehenden.

§. 46.

Anmerkung.

Wenn einer der im vorigen §§ genannten drey Fälle eintrifft, und also die Beschaffenheit des gefunde-

funbenen Winkels keiner fernern Prüfung durch die Berechnung der unbekannten Seite bedarf, so kann diese noch auf einen leichtern Weg, als in (§. 43.) gezeigt worden ist, gefunden werden. Man denke sich nämlich aus dem zweyten schon bekannt gewordenen Winkel C, eine auf die an der unbekannten Seite CD anliegende DE senkrechte Linie Cr, so ist $\overline{CD}^2 = \overline{Cr}^2 + \overline{Dr}^2$. Nun ist aber Cr = CD sin CDE = CD sin D (§. 21.) = EF sin E + FG sin (E+F) + GH sin (E+F+G) + ---- + ---- + ---- BC sin (E+------D) (§. 28.), und Dr = DE — Er = DE — (EF cos (180° — E) + FG cos (180° — (E+F)) + GH. cos (180 — (E+F+G)) +----- + ----- +---- BC cos (180° — (E+----B))) (§.30.) = DE + EF. cos E + FG cos (E+F) + GH. cos (E+F+G) +------ + BC cos (E-----B) (§. 21.). Diese Werthe für Cr und Dr aber, sind eben der Zähler und der Nenner desjenigen Bruches, welcher die Tangente des gefundenen Winkels W ausdrücket (§. 43.), da nun dieser Bruch schon bereits in Zahlen gefunden ist, so darf man nur aus der Summe der Quadrate des Zählers und Nenner die Quadratwurzel ausziehen, um CD zu haben. In dem gegebenen Beyspiele

(§.43.)

(§. 43.) hat man Tang W = 91,716 : 31,581 gefunden, daher ist CD = $\sqrt{91,716^2 + 31,581^2}$ = 97.

§. 47.

Auflösung für den zweyten Fall, wenn die zwey unbekannten Winkel nicht beyde an der unbekannten Seite anliegen, jedoch aber einer auf den andern unmittelbar folget.

Man denke sich aus einem der unbekannten Winkel eine auf die unbekannte Seite senkrechte Linie, so hat man für dieselbe zwey verschiedene Ausdrücke (§. 28.) in welchen alle Glieder bis auf eines, welches den unbekannten Winkel enthält, bekannt sind, und folglich kann dieses Glied durch die Absönderung, und endlich auch der Winkel selbst gefunden werden. Die noch übrigen zwey Stücke findet man sodann auf dieselbe Weise, wie in (§. 43.) gezeigt worden ist.

Z. B. Es seyen in (Fig. 17.), die Seite AL nebst den Winkeln EFG und FGH zu suchen, denket man sich die auf AL senkrechte Gg, so ist nach (§. 28. LK sin L + KH sin (L + K) + HG sin (L + K + H) =

AB sin A + BC sin (A + B) + - - - - + - - - - FG sin (A - - - - F) und die Rechnung stehet ungefähr so: L = — 24°, L + K = 44°, L + K + H = 149°, A = 54°, A + B = 28°, A + B + C = 82°, A + - - - - D = 191, A + - - - - E = 226°.

Log LK	=	1,9744748
Log sin (— 24)	=	9,6093133 — 10
Log prod	=	1,5837881
prod	=	— 38,353

Log KH	=	2,2405492
Log sin 44°	=	9,8417713 — 10
Log prod	=	2,0823205
prod	=	+ 120,870

Log HG	=	1,8573325
Log sin 149°	=	9,7118393 — 10
Log prod	=	1,5691718
prod	=	+ 37,083

Log AB	=	1,9242793
Log sin 54°	=	9,9079576 — 10
Log prod	=	1,8322369
prod	=	+ 67,957

Log BC	= 1,7323938	
Log sin 28°	= 9,6716093	— 10
Log prod	= 1,4040031	
prod	= + 25,351	
Log CD	= 1,9867717	
Log sin 82°	= 9,9957528	— 10
Log prod	= 1,9825245	
prod	= + 96,056	
Log DE	= 2,1461280	
Log sin 191°	= 9,2805988	— 10
Log prod	= 1,4267268	
prod	= — 26,713	
Log EF	= 1,9912261	
Log sin 226°	= 9,8569341	— 10
Loo prod	= 1,8481602	
prod	= — 70,495	
Log FG	= 2,0863598	
Log sin 167°	= 9,3520880	— 10
Log prod	= 1,4384478	
prod	= + 27,444.	

Daher hat man — 38,353 + 120,870 + 37,083 = 67,957 + 25, 351 = 96,056 — 26,713 — 70,495 + FG sin (226° + F). Das ist nach gehörigen Reduktion, 27,444 = FG sin (226° + F).

Log

Log 27,444 = 1,4384474
Log FG = 2,0863598
Log Quot. = 9,3520876 = Log sin (226° + F), diesem Log sin entspricht ein Winkel von 13°, oder 167 (§. 21.); der erste dieser beyden Werthe kann aber hier nicht statt haben; weil sonst F = — 213 folgen würde, welches gegen die Erklärung in (§. 4.) wäre; es muß also der zweyte Werth, nämlich 226° + F = 167° genommen werden, woraus man endlich F = — 59, und EFG = — 121 erhält, das ist, EFG ist ein eingehender Winkel von 121°. Aus diesen erhält man ferner nach (§. 8. oder 9.) FGH = 136°, und G = 144°.

Um endlich noch AL zu finden, setze man nach (§. 31.) AL + AB cos. A + BC. cos (A + B) + CD. cos (A + B + C) + ---- + ---- + KL cos (A + B ---- K) = o, oder nach (§. 28.) AL sin A = BC sin B + CD sin (B + C + DE sin (B + C + D) + ---- + LK sin (B + C ---- K); aus jeder dieser Gleichung läßt sich AL finden.

§. 48.

Anmerkung.

Es bedarf keiner Erinnerung, daß, wenn der im vorigen §. berechnete Sinus, in Zahlen negativ gefunden worden wäre, man anstatt des dem Sinus entsprechenden Winkels W oder 180 — W, 180° + W oder 360° — W in die Rechnung hätte nehmen müßen (§. 21.). Ist nämlich die algebraische Summe aller zwischen AL und Gg nach der Gegend des unbekannten Winkels F zu enthaltenen Nebenwinkel A, B, C - - - - = F + p, und der dem gefundenen Sinus entsprechende Winkel = W, so ist p + F = W, oder p + F = 180° — W für einen positiven Sinus; hingegen ist entweder p + F = 180° + W, oder p + F = 360° — W für einen negativen Sinus zu halten; p kann übrigens in Zahlen positiv oder negativ seyn.

§. 49.

Anmerkung.

Es bleibt also in beyden Fällen, sowohl wenn der Sinus W positiv, als wenn er negativ gefunden wird, zweifelhaft, welchen Bogen man in die Rechnung annehmen müße; ob man im erst Falle den Bogen W selbst, oder sein Supplement zu 180°, und eben so im zweyten Falle, ob man den Bo-

gen

gen $180° + W$, oder $360° - W$ nehmen müße. Diese Ungewißheit kann denjenigen nicht befremden, der sich erinnert, daß man eben diese Unvollkommenheit der Auflösung auch in der Trigonometrie bey eben demselben Falle findet. Sind nämlich die drey in dem Dreyecke zu findenden Stücke, eine Seite desselben, und die nicht daran liegenden Winkel, so bleibt es eben so, wie hier, ungewiß, ob der dem gefundenen Sinus entsprechende Winkel selbst, oder sein Supplement zu 180° genommen werden müße.

Jedoch lassen sich hier eben so, wie dort, einige Fälle angeben, in welchen diese Unbestimmtheit wegfällt. Nämlich: für positive Sinusse.

Erstens, wenn $p > 180° + W$ und positiv ist, so ist $p + F = 180° - W$; denn setze man $p = 180 + W + \alpha$, so hat man entweder $F + 180° + W + \alpha = W$, oder $F + 180° + W + \alpha = 180° + W$; wollte man hier das erste annehmen, so erhielte man $F = - 180 - \alpha = - (180° + \alpha)$, also müßte F ein eingehender Winkel von mehr als 180° seyn, welches nach der Erklärung (§. 4.) nicht statt hat.

Zwey-

Zweytens, wenn p negativ und größer als W ist, so ist $p + F = W$; denn man setze $p = W + \alpha$, so erhielte man in der Voraussetzung das $p + F = 180° - W$ seyn könne, $F - W - \alpha = 180° - W$, und folglich müßte abermal $F = 180° + \alpha$ seyn.

Drittens, wenn die algebraische Summe aller bekannten Nebenwinkel kleiner als $p + W$ ist, so ist $p + F = W$; denn man setze diese Summe $S = p + W - \alpha$, und den zweyten unbekannten Nebenwinkel $= y$, so ist $S + F + y = 360°$ (§. 9.), das ist, $p + W - \alpha + F + y = 360°$: wäre nun $p + F = 180° - W$, so müßte $F = 180° - W - p$, und ferner $p + W - \alpha + 180° W - p + y = 360°$ seyn, und daraus würde wieder $y = 180° + \alpha$ folgen.

Viertens, wenn $S > 360 + p + W$ ist, so muß wieder $p + F = W$ seyn; denn setze man $S = 360° + p + W + \alpha$, so ist $360° + p + W + \alpha + F + y = 360°$; wäre nun $p + F = 180° - W$, so müßte $F = 180° - W - p$, folglich $360° + p + W + \alpha + 180° - W - p + y = 360°$ seyn, aus welchem $y = -(180° + \alpha)$ folgen würde.

Fünf=

Fünftens wenn $S < 180° + p - w$ ist, so ist $p + F = 180° - w$; denn setze man wieder $S = 180° + p - w - \alpha$, so würde man durch eine der vorigen ähnlichen Rechnung $y = 180° + \alpha$ erhalten, wenn man $p + F = w$ setzen wollte.

Für negative Sinusse kann man durch ähnliche Schlüsse beweisen, daß $p + F = 180° + w$ seyn müße, wenn entweder erstens $p < 180° - w$ und positiv, oder zweytens wenn $p < w$ und negativ, oder drittens wenn $S < p + w - 180°$ ist; und daß hingegen allzeit $p + F = 360° - w$ ist, wenn $S < p + w$ ist.

§. 50.

Auflösung für den dritten Fall, wenn die beyden unbekannten Winkel, nicht unmittelbar aufeinander folgen, sondern durch andere bekannte Winkel voneinander abgesöndert sind.

Man denke sich die beyden Winkel durch eine gerade Linie zusammengezogen, so zerfällt die Figur in zwey andere, in deren einer der Fall (§. 43.) eintrifft, und folglich nach der daselbst gegebenen Regel aufgelöset werden kann. In der andern Figur aber der Fall (§. 47.) vorhanden ist, und also nach der dort gezeigten Art aufgelöset wird.

Es

Es sey z. B. in (Fig. 19.) die Seite BC nebst den Winkeln BAH und CDE zu suchen, und es sey AB = 187, CD = 120, DE = 76, EF = 106, FG = 77, GH 139, und HA = 118; ferner:

ABC	= + 79°,	so ist	B = + 101°.
BCD	= + 143°,		C = + 37°.
DFF	= + 99°,		E = + 81°.
EFG	= + 47°,		F = + 133°.
FGH	= — 80°,		G = — 100°.
GHK	= — 113°,		H = — 67°.

Man ziehe die beyden unbekannten Winkel A und D durch eine gerade AD zusammen, so hat man in der Figur ADEFGHA alle Seiten und Winkel bis auf die Seite AD und die daran liegenden Winkel DAH und ADE, folglich kann man nach (§. 37.) setzen, Tang ADE =

$$\left\{\begin{array}{l} EF \sin. E + FG \sin (E + F) \\ + GH \sin. (E + F + G) \\ + HA \sin. (E + F + G + H) \end{array}\right\} :$$

$$\left\{\begin{array}{l} DE + EF \cos E + FG. \cos(E+F) \\ + GH. \cos (E + F + G) \\ + HA. \cos (E + F + G + H) \end{array}\right\}$$

und

und die Rechnung bekömmt ungefähr ein solches Aussehen: E = 81°, E + F = 214°, E + F + G = 114°, E + F + G + H = 47°,

Log. EF		= 2,0253059
Log. sin	81°	= 9,9946199 — 10
Log. prod.		= 2,0199258
prod.		= + 104,695
Log. FG		= 1,8864907
Log. sin.	214°	= 9,7475617 — 10
Log. prod.		= 1,6340524
prod.		= — 43,058
Log. GH		= 2,1430148
Log. sin.	114°	= 9,9607302
Log. prod.		= 2,1037450
prod.		= + 126,983
Log. HA		= 2,0718820
Log. sin.	47°	= 9,8641275 — 10
Log. prod.		= 1,9360095
prod.		= + 86,300

Log. EF		= 2,0253059
Log. cos.	81°	= 9,1943324 — 10
Log. prod.		= 1,2196383
prod.		= + 16,582

Log.

Log. FG = 1,8864907
Log. cos. 214° = 9,9185742 — 10
Log. prod. = 1,8050649
prod. = — 63,836

Log. GH = 2,1430148
Log. cos. 114° = 9,6093133
Log. prod. = 1,7523281
prod. = — 56,536.

Log. HA = 2,0718820
Log. cos. 47° = 9,8337833 — 10
Log. prod. = 1,9056653
prod. = + 80,476, folglich ist

Tang. W = (104,695 — 43,058 + 126,983 + 86,300) : (76 + 16,582 — 63,836 — 56,536 + 80,476), das ist, Tang. W = 274,920 : 52,686

Log. 274,920 = 2,4392063
Log. 52,686 = 1,7216952
Log. Quot. = 10,7175111.

Diesem Log. Tang. entspricht ein Winkel von 79°, 9′, 4″, 6, und da E + F + G + H = 47° also kleiner als 180° + 79°, 9′, 4″, 6 ist, so ist dieser Winkel der ausgehende Poligonswinkel selbst, und nicht etwa der Nebenwinkel eines eingehenden (§. 45.). Es ist also ADE = 79°, 9′, 4″, 6,

6, und $D = 100°, 50, 55', 4$, und daraus findet man ferner $AD = \sqrt{(274,920)^2 + (52,686)^2} = 279,923$ (§. 46.), wenn man alles durch Logarithmen, die ohnehin schon gefunden sind, rechnet.

Und nun hat man in der Figur ABCD alle Seiten und Winkel bis auf die Seite BC, und die nicht daran liegende Winkel BAD und CDA bekannt, welche Stücke nach (§. 47.) gefunden werden.

Man denke sich nämlich aus A eine auf BC senkrechte Linie, so kann man sezen $AB \sin B = CD \sin C + DA \sin (C+D)$ und es ist

Log. AB	=	2,2718416
Log. sin. 101°	=	9,9919466 — 10
Log. prod.	=	2,2637882
prod.	=	+ 183,564

Log. CD	=	2,0791812
Log. sin. 37°	=	9,7794630 — 10
Log. prod.	=	1,8586442
prod.	=	+ 72,218, daher ist

$183,564 = 72,218 + DA \sin. (37° + D)$, das ist $111,346 : DA = \sin. (37 + D)$.

Log.

Log. 111,346 = 2,0466747

Log. DA = 2,4470383

Log. Quot. = 9,5996364. Diesem Log. sin. entspricht ein Winkel von 23°, 26′, 20″ 7, oder 156°, 33′, 39″, 3, da aber die Summe der bekannten Nebenwinkel B + C 138° < 180° + 37° — 23°, 26′, 20″, 7 ist, so kann ersteres nicht statt haben (§. 49.), sondern es ist 37° + D = 156°, 33′, 39″, 3, und daraus erhält man D = 119°, 33′, 39″, 3; CDA = 60°, 26′, 20″, 7; A = 102°, 26′, 20″, 7; BAD = 77° 33′, 39″, 3; und endlich CDF = CDA + ADE = 60°, 26′, 20″, 7 + 79°, 9′, 4″, 6 = 139°, 35′, 25″, 3, und da nun in dem Poligon ABC DEFGH bereits alle Winkel bis auf BAH bekannt sind, so findet man auch diesen nach (§. 8. oder 10.) = 45°, 24′, 34″, 7.

Um nun noch BC zu finden, kann man, um die Rechnung nicht ohne Noth weitläufig zu machen, sogleich das Viereck ABCD anstatt des Poligons ABC .... H vornehmen, und nach (§. 31.) setzen,

BC + CD cos C + DA. cos (C + D) + AB. cos (C + D + A) = 0, und es ist C = 37°, C + D = 156°, 33′, 39″, 3, C + D + A = 259°

Log.

Log. CD = 2,0791812
Log. cos. 37° = 9,9023486
Log. prod. = 1,9813298
prod. = + 95,836

Log. DA = 2,4470383
Log. cos.(C+D) = 9,9625983 — 10
Log. prod. = 2,4096366
prod. = — 256,825

Log. AB = 2,2718416
Log. cos. 259° = 9,2805988 — 10
Log. prod. = 1,5524404
prod. = — 35,681.

Folglich BC + 95,836 — 256,825 — 35,681 = 0, woraus endlich BC = 196,670 folget.

§. 51.

Anmerkung.

Das, was in (§. 42.) gesagt worden ist, gilt auch von der im vorigen Paragraph vorgetragenen Aufgabe; auch diese kann auf die gewöhnliche Art nicht aufgelöset werden, wenn nicht wenigstens einer der unbekannten Winkel an die unbekannte Seite anlieget, und selbst alsdann fällt die Rechnung viel weitläuftiger aus, als nach der von mir gegebenen Anleitung.

§. 52.

Aufgabe.

Es sey in einem Poligon, oder in was immer für einer gebrochenen, in sich selbst zurücklaufenden Linie alles bis auf drey Winkel, z. B. BAH, CDE, und EFG (Fig. 19.) bekannt. Man soll diese finden.

Auflösung.

Man ziehe die drey Winkel durch gerade Linien AD, DF und FA zusammen, so entstehet ein ein Dreyeck ADF, auf dessen jeder Seite eine Figur stehet, in welcher nur eine Seite nebst den zwey daran liegenden Winkeln unbekannt ist, und welche daher nach (§. 43.) gefunden werden können; man hat sodann in dem Dreyecke ADF, dessen drey Seiten nun bekannt sind, die drey Winkel trigonometrisch zu suchen, und findet endlich die drey unbekannten Poligonswinkel durch eine blosse Addition oder Subtraktion.

Es sey z. B. in (Fig. 19.) AB = 187, BC = 196,670, CD = 120, DE = 76, EF = 106, FG = 77, GH = 139, HA = 118, und die Winkel

ABC	= + 79° folglich	B	= + 101°.
BCD	= + 143°	C	= + 37°.
DEF	= + 99°	E	= + 81°.
FGH	= − 80°	G	= − 100°.
GHA	= − 113°	H	= − 67°.

So hat man in dem Vierecke ABCD nur die Seite AD nebst den Winkeln BAD und CDA unbekannt. Man setze also nach (§. 37.) (BC sin. B + CD sin. (B + C)) : (AB + BC cos. B + CD. cos. (B + C)) = Tang. W (wo W rntweder = BAD, oder W = − A ist) (§. 39.). Es ist aber B = 101°, B + C = 138°.

Log. BC	=	2,2037381
Log. sin. 101°	=	9,9919466 — 10
Log. prod.	=	2,2856847
prod.	=	+ 193,057

Log. CD	=	2,0791812
Log. sin. 138°	=	9,8255109 — 10
Log. prod.	=	1,9049921
prod.	=	+ 80,296.

Log. BC	=	2,2937381
Log. cos. 101°	=	9,2805988 — 10
Log. prod.	=	1,5743369
prod.	=	− 37,526

Log.

Log. CD $= 2,0791812$
Log. cos. $138° = 9,8710735 - 10$
Log. prod. $= 1,9502547$
prod. $= - 89,177.$

$(193,057 + 80,296) : (187 - 37,526 - 89,177) = 273,353 : 60,297.$

Log. $273,353 = 2,4367239$
Log. $60,297 = 1,7802957$
Log. Quot. $= 10,6564282.$

Diesem Log. tang. entspricht der Winkel 77°, 33′, 38″, 6. Da nun hier $B + C < 180° + 77°$, 33′, 38″, 6 ist, so ist $W = BAD$ (§. 45.), folglich $CDA = 60°, 26', 20'', 7$ (§. 8.) und $AD = \sqrt{(273,353)^2 + (60,297)^2} = 279,923$ (§. 46.).

In dem Vierecke AFGH sind nur die Seite AF und die an ihr liegenden Winkel HAF und GFA unbekannt. Man setze also nach (§. 37.). (GH sin. H + GF sin. (H + G)) : (AH + HG cos. H + GF cos. (H + G)) = Tang. W, wo wieder entweder $W = FAH$, oder $W = - A$ ist, (§. 39.), und es ist $H = 67°$, $H + G = 167°$; weil sowohl G als H in Ansehung des Poligons AFGH, von welchem jetzt die Rede ist, ausgehende Winkel sind.

Log.

Log. HG = 2,1430148
Log. sin. 67° = 9,9640261 — 10
Log. prod. = 2,1070409
prod. = + 127,950.

Log. GF = 1,8864907
Log. sin. 167° = 9,3520880 — 10
Log. prod. = 1,2385787
prod. = + 17,321.

Log. HG = 2,1430148
Log. cos. 67° = 9,5918780 — 10
Log. prod. = 1,7348928
prod. = + 54,312.

Log. GF = 1,8864907
Log. cos. 167° = 9,9887239 — 10
Log. prod. = 1,8752149
prod. = — 75,026,

(127,950 + 17,321) : (54,312 — 75,026 + 118)
= 145,271 : 97,286.

Es ist aber Log. 145,271 = 2,1621789
Log. 97,286 = 1,9880503
Log. Quot. = 10,1741286. Diesem Log. tang. entspricht der Winkel 56°, 11′, 25″ 1: und da H + G = 167° < 180° + 56°, 11′ 25″,

25″, 1 ist, so ist ω = FAH (§. 45.), und daraus erhält man ferner nach (§. 8.) GFA = 110°, 48′, 34″, 9 und AF =
$\sqrt{(145,271)^2 + (97,286)^2}$ = 174,838. (§. 46.).

In dem Dreyecke DEF sind wieder nur die Seite DF nebst den an ihr liegenden Winkeln EDF und EFD unbekannt.

Man setze also nach (§. 37.) EF sin. E : (DE + EF cos. E) = tang. ω, und es ist E = 81°,

Log. EF	=	2,0253059
Log. sin. 81°	=	9,9946199 — 10
Log. prod.	=	2,0199258
prod.	=	+ 104,695.

Log. EF	=	2,0253059
Log. cos. 81°	=	9,1943324 — 10
Log. prod.	=	1,2196383
prod.	=	+ 16,582,

104,695 : (76 + 16,582) = 104,695 : 92,582

Log. 104,695	=	2,0199258
Log. 92,581	=	1,9665266
Log. Quot.	=	10,0533992.

Diesem Log. tang. entspricht der Winkel 48°, 30′, 48″, 9 und da E < 180° + 48°, 30′, 48″, 9, so ist ω = EDF, und nicht etwa = — D, wel-

ches

ches ohnehin schon für sich klar ist, weil in einem Dreyecke kein eingehender Winkel statt hat; aus diesem erhält man ferner nach (§. 8.) EFD = 32°, 29′, 11″, und DF = $\sqrt{(104,695)^2+(92,582)^2}$ = 139,759. (§ 46.).

Und nun hat man in dem Dreyecke ADF alle drey Seiten, nämlich AD = 279,923, AF = 174, 838, und DF = 139,759 bekannt; man kann daher dessen Winkel nach trigonometrischen Regeln finden, z. B. nach der Formel cos. DAF = $(\overline{AD}^2 + \overline{AF}^2 - \overline{FD}^2) : 2AD . AF$. oder nach der Formel $(\sin. \frac{1}{2} DAF)^2 = r^2 (S - AD) . (S - AF) : AD . AF$, welche zur Berechnung mit Logarithmen bequemer ist, und wo S die halbe Summe aller drey Seiten bedeutet.

AD	=	279,923
AF	=	174,838
DF	=	139,759
		594,520
S	=	297,260

S	=	297,260	S	=	297,260
AD	=	279,923	AF	=	174,838
S — AD	=	17,337	S — AF	=	122,422

 Log.

Log. AD = 2,4470400
Log. AF = 2,2426350
Log. prod. = 4,6896750.

Log. (S — AD) = 1,2389739
Log. (S — AF) = 2,0878595
Log. prod. = 23,3268334
Log. AD. AF = 4,6896750
Log. Quot. = 18,6371584 = (L. sin. $\frac{1}{2}$DAF)^2
$\frac{1}{2}$ Log. Quot. = 9,3185792 = Log. sin. $\frac{1}{2}$DAF.

Diesem Log. sin. gehört ein Winkel zu von 12°, 1′, 10″, 7, oder auch 167°, 58′, 49″, 3, und daher ist DAF entweder = 24°, 2′, 21″, 4 oder = 335°, 57′, 38″, 6; da aber letzter Werth wegen (§. 4.) nicht statt hat, so ist DAF = 24°, 2′, 21″, 4. Und nun hat man ferner AF sin. DAF = FD sin. ADF,

Log. AF = 2,2426350
Log. sin. DAF = 9,6099813
Log. prod. = 1,8526163
Log. FD = 2,1453784
Log. Quot. = 9,7072379. Diesem

Log. sin. entspricht der Winkel 30°, 38′, 16″, 2, oder auch 149°, 21′, 43″, 8, und daraus erhält man, AFD = 125°, 19′, 22, 4, oder AFD = 6°, 35′, 54″, 8. Da aber AD > AF ist, so muß auch FAD > ADF seyn, folglich hat letzterer

Werth

Werth nicht statt; sondern es ist ADF = 30°, 38′, 16″, 2, und AFD = 125°, 19′, 22″, 4.

Vorhin hat man schon gefunden.

CDA = 60°, 26′, 20″, 7,
FDE = 48°, 30′, 48″, 9,
ADF = 30°, 38′, 16″, 2,
AFD = 125°,19′,22″,4, BAD=77°,33′,38″,6
AFG = 110°,48′,34″,9, DAF=24°, 2′,21″,4
EFD = 32°,29′,11″,1, HAF=56°,11′,25″,1.

Daraus ergiebt sich endlich

CDE = CDA + ADF + FDE = 139°35′,25″,8
EFG = AFD + EFD — AFG = 46°,59′,58″,6
BAH = BAD + DAF — HAF = 45°,24′,34″,9.

Und diese Werthe kommen mit denen im vorigen Beyspiele (§. 50.) gefundenen bis auf einige wenige Zehntheile von Sekunden überein.

§. 53.

Aufgabe.

In dem Poligon ABC....L (Fig. 20.) dessen Seiten und Winkel alle bekannt sind, ist eine Linie PB mit MN parallel gezogen, welche letztere mit AB einen bekannten Winkel BAM = α einschließet; man soll die Grössen der Linien BP und PK finden.

Auf-

Auflösung.

Aus den bekannten Winkeln α und BAL hat man sogleich $\beta = 180° - \alpha - BAL$, und ferner nun ist in der Figur ABPKLA alles, bis auf den Winkel ABP und bis auf den Winkel ABP und die beyden Seiten BP und PK, bekannt, daher können diese nach (§. 41.) gefunden werden.

§. 54.

Zusatz.

Man könnte auch die BP und PH aus der Figur BPHGFEDCB finden; denn wenn man durch F eine Linie mn mit MN parallel ziehet, so sind auch die Winkel γ und δ bekannt wegen $\gamma + E + D + C + B + \alpha = 180°$, und $\delta + G + H + K + L + \beta = 180°$ (§. 17.), und nun hat man in der Figur PBCDEFGHP alle Winkel und Seiten bis auf PBC, HP und PB bekannt, welche nach (§. 41.) gefunden werden.

Daß man übrigens, wenn HP oder KP gegeben ist, die Seite BP nebst den daran liegenden Winkeln nach (§. 43.) finden könne, ist für sich klar.

§. 55.

Aufgabe.

Die Größe einer jeden Diagonal AG (Fig. 21. u. 22.) einer Figur zu finden.

Auflösung.

Diese Diagonal mag entweder nur durch das innere der Figur, wie in (Fig. 21.) gehen, oder auch mehrere Seiten der Figur durchschneiden, wie in der 22ten Figur, so kann dieselbe allezeit nach (§. 43.) gefunden werden. So z. B. ist in Fig. 22.

$$\left\{ \begin{array}{l} BC \text{ sin. } B + CD \text{ sin. } (B + C) \\ + - - - - - - + - - - - - - - - - \\ + FG \text{ sin. } (B + - - - - - - - F) \end{array} \right\} :$$

$$\left\{ \begin{array}{l} AB + BC \text{ cos. } B + CD. \text{ cos. } (B + C) \\ + - - - - - - - + - - - - - - - - - \\ + FG \text{ cos. } (B + - - - - - - - F) \end{array} \right\}$$

$= \text{Tang. } BAG = \text{Tang. } (- A)$, und ferner

$AG + AB \text{ cos. } A + BC \text{ cos. } (A + B) - - - - - - - FG \text{ cos. } (A + - - - - F) = 0$, oder, wenn wegen der Beschaffenheit des Winkels BAG kein Zweifel vorhanden ist, $AG = \sqrt{p^2 + q^2}$, wo p und q den Zähler und den Nenner des Bruches vor-

stellet,

stellet, durch welchen die Tangente des Winkels BAG ausgedrückt ist.

Es wird jeder leicht einsehen, daß sowohl diese, als die vorhergehende Aufgabe zur Untersuchung dienen könne, ob eine Figur mit gehöriger Genauigkeit gezeichnet, und ihre Seiten und Winkel mit den auf dem Felde gemessenen übereinstimmend seyen. Man darf in diesem Falle nur was immer für eine Diagonal oder sonstige Linie durch die gezeichnete Figur ziehen, und ihre Lage und Größe nach der gegebenen Anleitung bestimmen. Wird nun diese auf dem Papier gemessen, und sie trifft mit dem berechneten Maaße überein, so kann man versichert seyn, daß, wenigstens beym Auftragen, kein merklicher Fehler vorgegangen sey. Ein Vortheil, der mir für die Ausübung nicht unerheblich zu seyn scheint. Man kann nun mit Gewißheit versichert seyn, ob in der Messung auf dem Felde, oder vielleicht nur in dem Auftragen auf dem Papier ein Fehler vorgegangen sey, wenn eine auf dem Papier gemessene Diagonal, mit der auf dem Felde gemessenen, nicht übereinkommt, und ob man also die ganze Vermessung als unrichtig erklären soll, oder nur die Verzeichnung nochmal und genauer, als vorhin geschehen, vorzunehmen habe,

und

und viele Mühe und Kosten ersparen könne. Freylich dürfte der erste Fall der gewöhnlichste seyn, ich bin aber versichert, daß der zuletzt genannte nicht gar so selten vorkommen mag; denn es ist fast unmöglich, eine auf dem Felde gemessene Figur, nach der bisher üblichen Art mit eben der Genauigkeit zu Papier zu bringen, mit der sie auf dem Felde gemessen werden kann.

Drittes Kapitel

von der Berechnung des Flächenraumes der Poligone.

§. 56.

Lehrsatz.

Der Flächenraum eines Poligons ist der halben Summe der Produkte gleich, welche entstehen, wenn man alle Rechtecke, die aus allen Seiten des Poligons weniger einen formiert werden können, durch den Sinus eines Winkels multiplizieret, welcher der algebraischen Summe aller zwischen den zweyen das Rechteck formierenden Seiten enthaltenen Nebenwinkeln gleich ist. So z. B. ist. ABCDE (Fig. 5.) $= \frac{1}{2}$ (BC. CD. sin. C + BC. DE. sin. (C + D)

+ BC.

$+ BC. EA. \sin. (C+D+E)) + \frac{1}{2}(CD. DE. \sin. D + CD. EA \sin. (D+E)) + \frac{1}{2} DE. DA \sin. E.$

Beweis.

In dem Dreyecke ABC ziehe man aus C die auf AB senkrechte CD (Fig. 23.), so ist $ABC = \frac{1}{2} AB. CD.$ es ist aber $CD = BC \sin. ABC = BC \sin. B$, folglich ist auch $ABC = \frac{1}{2} AB. BC \sin. B.$

In dem Vierecke ABCD ziehe man die Diagonal BD (Fig 24. u. 25.), so ist $ABCD + \frac{1}{2}(AB. AD \sin. A + BC. CD \sin. C)$ (Fig. 24.), oder $ABCD = \frac{1}{2}(AB. AD \sin. A - BC. CD \sin. C)$ (Fig. 25.). Es ist aber $AD \sin. A = BC \sin. B + CD \sin. (B+C)$ (§. 28.), folglich ist auch $ABCD = \frac{1}{2}(AB. BC. \sin. B + AB. CD \sin. (B+C) + BC. CD \sin. C)$ in Fig. 24, oder $ABCD = \frac{1}{2}(AB. BC \sin. B + AB. CD \sin. (B+C) - BC. CD \sin. C)$ in Fig. 25 $= \frac{1}{2}(AB. BC \sin. B + AB. CD \sin. (B+C) + BC. CD. \sin. (-C)$ (§. 23.).

In dem Fünfecke ABCDE ziehe man die Diagonal BE (Fig. 26.), so ist $ABCDE = ABE + BCDE = \frac{1}{2}(AB. AE \sin. A + BC. CD \sin. C + BC. DE \sin. (C+D) + CD. DE. \sin. D)$. Es ist aber $AE \sin. A = BC \sin. B + CD \sin. (B+C) + DE \sin. (B+C+D)$ (§. 28.)

(§. 28.), daher ist auch ABCDE $= \frac{1}{2}$ (AB. BC sin. B + AB. CD sin. (B + C) + AB. DE sin. (B+C+D) + BC. CD sin. C + BC. DE sin. (C+D) + CD. DE. sin. D).

Eben so ist ABCDE (Fig. 27.) $= \frac{1}{2}$ (BCDE — ABE) $= \frac{1}{2}$ (BC. CD sin. C + BC. DE sin. (C + D) + CD. DE sin. D — AB. AE sin. A) $= \frac{1}{2}$ (BC. CD sin. C + BC. DE sin. (C + D) + CD. DE sin. D + AB. AE sin. (— A)), es ist aber AE sin. (— A) = BC sin. B + CD sin. (B + C) + DE sin. (B + C + D) (§. 28.) folglich ist auch ABCDE $= \frac{1}{2}$ (AB. BC sin. B - - - - - - .

In dem Fünfecke ABCDE in Fig. 28., welches zwey aufeinander folgende eingehende Winkel hat, ist ABCDE = ABE — BCDE $= \frac{1}{2}$ (AB. AE sin. A) — $\frac{1}{2}$ (BC. CD sin. C + BC. DE sin. (C + D) + CD. DE sin. D) $= \frac{1}{2}$ (AB. AE sin. A) + $\frac{1}{2}$ (BC. CD sin. (— C) + BC. DE sin. (— C — D) + CD. DE sin. (— D) (§. 23.), es ist aber wieder AE sin. A = BC sin. B + CD sin. (B + C) - - - - daher ist auch ABCDE $= \frac{1}{2}$ (AB. BC sin. B + AB. CD sin. (B + C) + - - - - - -)

In Fig. 29., wo die zwey eingehenden Winkel nicht auf einander folgen, ist wieder ABCDE = ABE + BCDE $= \frac{1}{2}$ (AB. AE sin. A + BC. CD sin.

C +

$C + BC. DE \sin. (C - D) + CD. DE \sin. (-D))$, und wenn man ebenfalls anstatt AE sin. A seinen Werth, wie in den vorigen Fällen setzt, so bekommt man eben den vorigen Ausdruck, vorausgesetzt, daß man, (wie immer geschehen muß) auch auf die positive und negative Beschaffenheit der Winkel sieht.

Ueberhaupt wenn die Anzahl der Seiten eines Poligons $= n$ ist, und man ziehet vor dem Winkel A vorbey eine Diagonal z. B. BF im Sechseck, BG im Siebeneck, BH im Achteck, BI im Neuneck u. s. w., so zerfällt das Poligon in ein Dreyeck, und in ein Poligon, dessen Anzahl der Seiten $= n - 1$ ist, und es ist entweder die Summe, oder die Differenz der beyden Theile dem vorgegebenen Poligon am Inhalte gleich.

Ist nun die Richtigkeit des vorgetragenen Lehrsatzes bey einem n seitigen Poligon erwiesen, und man setzet anstatt AF sin. A, AG sin. A, AH sin. A - - - - seinen Werth aus (§. 28.), so findet man die Richtigkeit desselben auch bey einem $n + 1$ seitigen Poligon, wenn man sich nur dabey erinnert, daß überhaupt $\sin. (-\alpha) = -\sin. \alpha$ ist, (§. 23.), und auf die Beschaffenheit der Winkel zu sehen nicht vergißt. Da nun die Wahrheit des

vorge-

vorgetragenen Lehrsatzes bey dem Dreyecke, Vierecke und Fünfecke bereits erwiesen worden ist, so muß er auch für das 6eck, 7eck, 8eck ... neck gelten.

§. 57.

Anmerkung.

Diese Formel, durch welche der Flächenraum eines Poligons ausgedrückt wird, enthält so viele Glieder, als die Anzahl der Rechtecke ist, welche aus allen Seiten der Figur, weniger eine, formirt werden können. Nun ist die Anzahl aller Combinationen zu zwey und zwey, welche aus n Gegenständen gemacht werden können $= \frac{n(n-1)}{2}$, folglich enthält die besagte Formel $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Glieder, wenn die Anzahl der Seiten des Poligons $= n$ ist.

§. 58.

Anmerkung.

Diese zimlich beträchtliche Anzahl der Glieder kann um sehr vieles vermindert werden, wenn man das Poligon, dessen Inhalt zu wissen verlangt wird, durch Diagonalen in zwey oder mehrere Theile theilet. So z. B. enthält die Formel, welche

den

den Inhalt eines Zwölfeckes ausdrücket, $\frac{11.10}{2}$ = 55 Glieder; theilet man aber dasselbe durch eine Diagonal in zwey Siebenecke, so enthält jede Formel für den Inhalt derselben $\frac{6.5}{2} = 15$, also zusammen nur 30 Glieder.

Will man das Zwölfeck durch zwey Diagonalen in zwey Fünfecke und ein Sechseck zerfällen, so enthalten die beyden Formeln die Fünfecke zusammen $\frac{2.4.3}{2} = 12$, und die für das Sechseck $\frac{5.4}{2} = 10$, also zusammen nur 22 Glieder, u. s. w. Jedoch müßte man in diesem Falle auch noch eine dieser Diagonalen nach (§. 55.) berechnen, weil sie bey der Berechnung des zweyten oder dritten Theiles, wieder vorkömmt.

§. 59.

Aufgabe.

Die drey Winkel eines Dreyeckes ABC nebst dessen Inhalt = m sind angegeben; (Fig. 23.) man soll seine Seiten finden.

Auflösung.

Es ist AB. AC sin. A $=$ 2 m (§. 56.), und AC sin. C $=$ AB sin. B (§. 28.), aus der Verbindung beyder Gleichungen, enthaltet man AC $= \sqrt{2\,m\,\sin.\,B : \sin.\,C\,\sin.\,A}$, AB $= \sqrt{2\,m\,\sin.\,C : \sin.\,A.\,\sin.\,B}$, und BC $= \sqrt{2\,m\,\sin.\,A : \sin.\,B.\,\sin.\,C}$.

§. 60.

Aufgabe.

Es ist der Inhalt eines Dreyeckes ABC sowohl, als eine Seite AB desselben, und ein an ihr liegender Winkel BAC gegeben; man soll die noch übrigen unbekannten Stücke finden.

Auflösung.

Es ist AB. AC sin. A $=$ 2 m, oder auch AC $=$ 2 m : AB sin. A, und Tang. ABC $=$ AC sin. A : (AB $+$ AC. cos. A) (§. 37.), durch die Substitution für AC erhält man Tang. ABC $=$ 2 m sin. A : ($\overline{AB}^2$ sin. A $+$ 2 m cos. A) oder auch (weil cos. A : sin. A $=$ Cotang. A, und Tang. ABC $=$ 1 : Cotang. ABC ist) Cotang. ABC $=$ ($\overline{AB}^2$ sin. A $+$ 2 m cos. A) : 2 m sin. A $=$ Cotang. A $+$ $\overline{AB}^2$: 2 m. Die noch übrigen drey Stücke findet man entweder nach der vorigen Aufgabe, oder durch eine trigonometrische Proportion.

§. 61.

Aufgabe.

In einem Vierecke (Fig. 24.) ABCD sind alle Winkel nebst einer dessen Seiten z. B. BC, wie auch dessen Inhalt = m gegeben; man soll die übrigen drey Seiten finden.

Auflösung.

Es ist AB sin. A = DC sin. D + CB sin. (D+C) (§. 28.), und 2 m = AB. AC sin. B + AB. CD sin. (B + C) + BC. CD sin. C (§. 56.), aus der ersten Gleichung entwickle man AB, und setze dessen Werth in die zweyte, so erhält man nach gehörig geordneter Gleichung, $\overline{DC}^2$ + DC. BC (sin. D. sin. B + sin. A sin. C + sin. (B+C). sin. (C + D)) : sin. D. sin. (B + C) = 2 m sin. A sin. : D. sin. (B + C) — $\overline{BC}^2$ sin. B. sin. (D + C) : sin. D. sin. (B + C). Man setze der Kürze wegen den Factor des zweyten Gliedes = p, und alle auf der andern Seite des Gleichheitzeichens sich befindenden Größen = q, so hat man $\overline{DC}^2 + p. DC = q$, und endlich $DC = \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2} - \frac{p}{2}$. Die noch übrigen zwey Seiten AB und AD findet man nach (§. 41.).

§. 62.

§. 62.

Anmerkung.

Diese gefundene Gleichung wird um sehr vieles abgekürzt, wenn ABCD ein Trapezium ist; denn ist DC mit AB parallel, so ist $\sin. (B+C) = \sin. 180° = 0$, $\sin. A = \sin. D$, und $\sin. C = \sin. B$, und die obige Gleichung verwandelt sich in $2\, BC. DC \sin. B. \sin. D = 2\, m \sin. A - \overline{BC}^2 \sin. B. \sin. (D+C)$, woraus endlich $DC = m \sin. A : BC \sin. B. \sin. D - BC \sin. (D+C) : 2 \sin. D$ folget.

Ist aber die bekannte Seite BC mit AD parallel, so ist $\sin. (C+D) = \sin. 180° = 0$, $\sin. A = \sin. B$, und $\sin. C = \sin. D$; man bekömmt daher anstatt der vorigen Gleichung diese: $\overline{DC}^2 + 2 BC. DC \sin. B : \sin. (B+C) = 2 m \sin. B : \sin. C. \sin. (B+C)$. Die übrigen zwey Seiten werden nach (§. 41.) gefunden.

§. 63.

Aufgabe.

In einem Poligon (Fig. 21.) AB------L dessen Inhalt bekannt ist, sind auch alle Seiten und Winkel desselben bis auf drey nacheinander folgende Seiten z. B. LA, AB, und BC gegeben; man soll diese finden.

G Auf-

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MUENCHEN

Auflösung.

Man verfahre völlig so, wie in (§. 61.) gezëigt worden ist. Man söndere nämlich AB aus der Gleichung AB sin. A = LK sin. L + KH sin. (L + K) ----- CB sin. (L + ---- C) (§. 28.) ab, und setze dessen Werth in der Gleichung, welche den Flächenraum des Poligons ausdrückt (§. 56.), so erhält man, nachdem die Gleichung gehörig geordnet ist, eine Gleichung des zweyten Grades, von der Form: $\overline{BC}^2 + p.BC = q$, aus welcher endlich

$BC = \sqrt{q + \frac{1}{4}p^2} - \frac{p}{2}$ folget. Die übrigen zwey Seiten können nach (§. 41.) gefunden werden.

§. 64.

Aufgabe.

Es ist der Inhalt eines Poligons (Fig. 22.) ABC.. M. bekannt, und = m, die Seiten und Winkel desselben sind ebenfalls bis auf zwey nebeneinander liegende z. B. AM und LM, und die zwey an AM liegenden Winkel A und M bekannt. Man soll diese finden.

Auflösung.

Aus der Gleichung 2 m = ML. LK sin. L + ML. KH sin. (L + K) + ------ welche den Inhalt des

Poli-

Poligons ausdrückt, entwickle man ML, so können AM nebst den daranliegenden Winkeln A und M nach (§. 43.) gefunden werden.

§. 65.

Anmerkung.

Eine Anwendung der vorigen Aufgaben kann bey Austauschung der Grundstücke vorkommen, wenn (Fig. 30.) z. B. von einem Wald M, wovon ABC --- H ein Theil ist, ein Stück ABCDEFQ abgetauscht werden soll, welches einem gegebenen Inhalt gleich kommen muß. In diesem Falle ist entweder der Punkt P oder Q, das ist, ihre Entfernung PB oder QF von B oder F gegeben, oder es ist die Richtung einer Linie MN gegeben, mit welcher die Grenzlinie QP parallel seyn soll. Im ersten Falle kommt es auf die Auflösung der Aufgabe (§. 64.) an, und im zweyten Falle ist der Winkel NDE entweder unmittelbar, oder auch durch wirkliche Messung desselben gegeben, wodurch also auch die Winkel BPQ und PQF nach (§. 18.) bekannt werden, und mithin diese Aufgabe mit der in (§. 63.) einerley ist.

Viertes Kapitel.

Anwendung der vorgetragenen Sätze auf die Theilung der Figuren.

§. 66.

Aufgabe.

Ein Poligon ABCD - - - - - - L, (Fig. 31.) dessen Seiten und Winkel alle in Zahlen gegeben sind, soll in mehrere Theile, deren Verhältniß zu dem ganzen ebenfalls gegeben ist, getheilet werden, so daß alle Theilungslinien pq, p′q′, p″q″ - - - - - mit einer vorgegebenen Linie MN, die mit HK einen bekannten Winkel = α einschließet, parallel seyen. Man verlanget die Punkte p, p′, p″, q, q′, q″ - - - - - zu bestimmen.

Auflösung.

Aus den gegebenen Seiten und Winkeln der Figur berechne man nach (§. 56.) ihren Inhalt, so kann man ferner aus dem gegebenen Verhältniße der Theile zum ganzen die wirkliche Größe dieser Theile finden, und da auch die Winkel Gpq, und Kqp an der Theilungslinie pq durch die Lage der MN bekannt sind (§. 17. u. 18.), so können die Seiten

Gp und Kq, Fp' und Lq', Ep'' und Bq'' - - - - - nach (§. 63.) bestimmt werden. Folgendes Beyspiel soll dieses erläutern.

Es sey das Poligon AB - - - - - L in 4 Theile nach dem Verhältniß 12, 11, 10 und 9, von H nach D zu, zu theilen, NHK seye = 14°, und die Seiten und Winkel des Poligons seyen folgende:

AB = 84	LAB = + 126°,	A = + 84°
BC = 94	ABC = − 154°	B = − 26°
CD = 97	BCD = + 126°	C = + 54°
DE = 140	CDE = + 71°	D = + 109°
EF = 98	DEF = + 145°	E = + 35°
FG = 122	EFG = − 121°	F = − 59°
GH = 72	FGH = + 136°	G = + 44°
HK = 174	GHK = + 75°	H = + 105°
KK = 94,292	HKL = + 112°	K = + 68°
LA = 64,235	KLA = − 156°	L = − 24°

so ist, nachdem man, der in (§. 58.) angezeigten Ursache wegen, die ganze Figur durch die Diagonal AF in zwey Theile zerfället hat, der Flächenraum des Theiles AFGHKL = ½ (FG. GH sin. G + FG. HK sin. (G + H) + FG. KL sin. (G + H + K) + FG. LA sin. (G + H + K + L)

+ GH.

$+ GH.\ HK \sin. H + GH.\ KL \sin. (H + K) + GH.\ LA \sin. (H + K + L)$
$+ HK.\ KL \sin. K + HK.\ LA \sin. (K + L)$
$+ KL.\ LA \sin. L$ (§. 56.), und es ist $G = 44°$, $G + H = 149°$, $G + H + K = 217°$, $G + \text{- - - - -} L = 193°$, $H = 105°$,
$H + K = 173°$, $H + K + L = 149°$
$K = 68°$, $K + L = 44°$, und $L = -24°$.

Log. FG	= 2,0863598
Log. GH	= 1,8573325
Log. sin. 44°	= 9,8417713 — 10
Log. prod.	= 3,7854636
prod.	= + 6101,878.

Log. FG	= 2,0863598
Log. HK	= 2,2405492
Log. sin. 149°	= 9,7118393 — 10
Log. prod.	= 4,0387483
prod.	= + 10933,228.

Log. FG	= 2,0863859
Log. KL	= 1,9744748
Log. sin. 217°	= 9,7794630 — 10
Log. prod.	= 3,8402976
prod.	= — 6923,052.

Log.

Log. FG	=	2,0863598
Log. LA	=	1,8077717
Log. ſin. 193°	=	9,3520880 — 10
Log. prod.	=	3,2462195
prod.	=	— 1762,867.
Log. GH	=	1,8573325
Log. HK	=	2,2405492
Log. ſin. 105	=	9,9849438 — 10
Log. prod.	=	4,0828285
prod.	=	+ 12101,117.
Log. GH	=	1,8573325
Log. KL	=	1,9744748
Log. ſin. 173°	=	9,0858945 — 10
Log. prod.	=	2,9177018
prod.	=	+ 827,374.
Log. GH	=	1,8573325
Log. LA	=	1,8077717
Log. ſin. 149°	=	9,7118393 — 10
Log. prod.	=	3,3769435
prod.	=	+ 2382,009.
Log. HK	=	2,2405492
Log. KL	=	1,9744748
Log. ſin. 68°	=	9,9671659 — 10
Log. prod.	=	4,1821899
prod.	=	+ 15212,126.

Log.

Log. HK	=	2,2405492
Log. LA	=	1,8077717
Log. sin. 44°	=	9,8417713 — 10
Log. prod.	=	3,8900922
prod.	=	+ 7762,120.

Log. KL	=	1,9744748
Log. LA	=	1,8077717
Log. sin. (—24)	=	9,6093133 — 10
Log. prod.	=	3,3915598
prod.	=	— 2463,541.

Daher ist der Inhalt AFGHKL = $\frac{1}{2}$ (6101, 878 + 10933,228 — 6923,052 — 1762,867 + 12101,117 + 827,374 + 2382,009 + 15212,126 + 7764,120 — 2463,541) = 44172,392 : 2 = 22086,196.

Ferner ist der Inhalt des Theiles ACDEF = $\frac{1}{2}$ (AB. BC sin. B + AB. CD sin. (B + C) + AB. DE sin. (B + C + D) + AB. EF sin. (B + C + D + E) + BC. CD sin. C + BC. ED sin. (C + D) + BC. EF sin. (C + D + E)
+ CD. DE sin. D + CD. FE sin. (D + E)
+ DE. EF sin. E) (§. 56.), und er ist B = — 26°, B + C = 28°, B + C + D = 137°, B + C + D + E = 172°, C = 54°, C + D = 163, C + D + E = 198°, D = 109, D + E = 144°, und E = 35°.

Log.

Log. AB = 1,9242793
Log. BC = 1,7323838
Log. ſin. (— 26°) = 9,6418420 — 10
Log. prod. = 3,2985151
prod. = — 1988,451.

Log. AB = 1,9242793
Log. CD = 1,9867717
Log. ſin. 28° = 9,6716093 — 10
Log. prod. = 3,5826603
prod. = + 3825,254.

Log. AB = 1,9242793
Log. DE = 2,1461280
Log. ſin. 137° = 9,8337833 — 10
Log. prod. = 3,9041906
prod. = + 8020,300.

Log. AB = 1,9242793
Log. EF = 1,9912261
Log. ſin. 172° = 9,1435553 — 10
Log. prod. = 3,0590607
prod. = + 1145,673.

Log. BC = 1,7323938
Log. CD = 1,9867717
Log ſin. 54° = 9,9079576 — 10
Log. prod. = 3,6271231
prod. = + 4237,630.

Log.

Log. BC	=	1,7323938
Log. DE	=	2,1461280
Log. sin. 163°	=	9,4659353 — 10
Log. prod.	=	3,3444571
prod.	=	+ 2210,330.
Log. BC	=	1,7323938
Log. EF	=	1,9912261
Log. sin. 198°	=	9,4899824 — 10
Log. prod.	=	3,2136023
prod.	=	— 1635,318.
Log. CD	=	1,9867717
Log. DE	=	2,1461280
Log. sin. 109°	=	9,9756701 — 10
Log. prod.	=	4,1085698
prod.	=	+ 12840,141.
Log. CD	=	1,9867717
Log. EF	=	1,9912261
Log. sin. 144°	=	9,7692187 — 10
Log. prod.	=	3,7472165
prod.	=	+ 5587,487.
Log. DE	=	2,1461280
Log. EF	=	1,9912261
Log. sin. 35°	=	9,7585913 — 10
Log. prod.	=	3,8959454
prod.	=	+ 7869,467.

Folglich ist der Inhalt ABCDEF $= \frac{1}{2}(-1988,451 + 3825,254 + 8020,300 + 1145,673 + 4237,630 + 2210,330 - 1635,318 + 12840,141 + 5587,487 + 7869,467) = 42112,513 : 2$ das ist: ABCDEF $= 21056,256$

AFGHKL $= 22086,196$

ABC--KL $= 43142,452$, und man findet durch die Gesellschaftsregel, daß die verlangten vier Theile folgende sind 12326,415, 11299,213, 10272,013, und 9244,811. Und nun die Theilung selbst.

Durch einen leichten Ueberschlag findet man sogleich, daß die erste Theilungslinie pq, welche 12326,415 abschneiden soll, nicht die Linie HG, sondern die GF irgendwo in p schneiden müße, und daß man folglich in dem Poligon GHKqp die Seiten Gp und Kq zu suchen habe. Ferner weiß man auch aus (§. 18.), daß $pqK = \alpha + K = 14° + 68° = 82°$, und folglich sein Nebenwinkel $q = 98°$, $Gpq = \beta + G = 180° - \alpha - KHG = 135$, folglich $p = 45°$ sey; man kann daher in der Gleichung $pG \sin. p = qK \sin. q + KH \sin. (q + K) + HG \sin. (q + K + H)$ (§. 28.), die Gp leicht absöndern, und ihren Werth in die Gleichung $2m = pG. GH \sin. G + Gp. HK \sin. (G + H) + Gp. Kq \sin. (G + H + K) + GH. HK \sin. H + GH. Kq \sin. (H+K)$

(H + K) + HK. Kq sin. K setzen. Damit sich aber die Glieder besagter Gleichung nicht zu sehr anhäufen, so ist es rathsamer alles sogleich in Zahlen zu berechnen. Man hat nämlich p = 45°, q=98, q + K = 166, und q + K + H = 271°.

Log. HK	=	2,2405492
Log. sin. 166°	=	9,3836752 — 10
Log. prod.	=	1,6242244
Log. sin. 45°	=	9,8494850 — 10
Log. Quot.	=	1,7747394
Quot.	=	+ 59,530.

Log. HG	=	1,8573325
Log. sin. 271°	=	9,9999338 — 10
Log. prod.	=	1,8572663
Log. sin. 45°	=	9,8494850 — 10
Log. Quot.	=	2,0077813
Quot.	=	— 101,801.

Log. sin. 98°	=	9,9957528 — 10
Log. sin. 45°	=	9,8494850 — 10
Log. Quot.	=	0,1462678
Quot.	=	+ 1,400, also pG=

qK. 1,400 + 59,530 — 101,808 = qK. 1,400 — 42,278. Man setze der Kürze wegen pG = y, qK = x, 1,400 = a, und 42,278 = b, so ist y = ax — b;

ax — b; diesen Werth für pG setze man in die Gleichung 2m = pG. GH sin. G + - - - - - HK. Kq sin. K so erhält man folgende Gleichung:

$2m = ax.\ GH \sin.\ G + ax.\ HK \sin.\ (G + H) + ax^2.$
$\sin.\ (G + H + K) - b.\ GH \sin.\ G - b.\ HK \sin.$
$(G + H) - bx.\ \sin.\ (G + H + K) + GH.\ HK$
$\sin.\ H + x.\ GH.\ \sin.\ (H + K) + x.\ HK \sin.\ K,$
und es ist

$2m = 24652{,}828,\ G = 44^\circ,\ G + H = 149^\circ,$
$G + H + K = 217,\ H = 105^\circ$, und $H + K$
$= 173^\circ$.

Log. a	=	0,1461280
Log. GH	=	1,8573325
Log. sin. 44°	=	9,8417713 — 10
Log. prod.	=	1,8452318
prod.	=	+ 70,022.

Log. a	=	0,1461280
Log. HK	=	2,2405492
Log. sin. 149°	=	9,7118393 — 10
Log. prod.	=	2,0985165
prod.	=	+ 125,463.

Log. a	=	0,1461280
Log. 217°	=	9,7794630 — 10
Log. prod.	=	0,9255910 — 1
prod.	=	— 0,842841.

Log.

Log. b	=	1,6261144
Log. CH	=	1,8573325
Log. ſin. 44°	=	9,8417713 — 10
Log. prod.	=	3,3252182
prod.	=	+ 2114,551.
Log. b	=	1,6261144
Log. HK	=	2,2405492
Log. ſin. 149°	=	9,7118393 — 10
Log. prod.	=	3,5785029
prod.	=	+ 3788,810.
Log. b	=	1,6261144
Log. ſin. 217°	=	9,7794630 — 10
Log. prod.	=	1,4055774
prod.	=	— 25,444.
Log. GH	=	1,8573325
Log. HK	=	2,2405492 —
Log. ſin. 105°	=	9,9849438 — 10
Log. prod.	=	4,0828255
prod.	=	+ 12101,116.
Log. GH	=	1,8573325
Log. ſin. 173°	=	9,0858945 — 10
Log. prod.	=	0,9432270
prod.	=	= 8,775.

Log.

Log. HK $= 2,2405492$

Log. sin. $68^\circ = 9,9671659 - 10$

Log. prod. $= 2,2077151$

Log. prod. $= + 161,330$. Man hat also $24652,830 = x. 70,022 + x. 125,463 - x.^2 0,842541 - 2114,551 - 3788,810 + x. 25,444 + 12101,116 + x. 8,775 + x. 161,330$, das ist, nach gehöriger Reduktion $x^2 - x. 464,113 + 21904,120 = 0$. aus welchen man endlich $x = 232,057 \pm 178,735$ erhält, wovon aber nur das untere Zeichen brauchbar ist; weil $x < GF$ seyn muß.

Es ist also $x = 232,057 - 178,735 = 53,322$, und aus diesem erhält man ferner $y = Gp = ax - b = 1,4 + 53,322 - 42,278 = 32,373$.

Tragt man demnach 53,322 aus K in q, und 32,373 aus G in p, und ziehet qp, so ist diese mit MN parallel, und pGHK, $= 12326,415$ der verlangte erste Theil. Man muß aber noch der folgenden Rechnung wegen, die Größe der Linie pq aus der Gleichung pq sin. p = GH sin. G + HK sin. (G + H) + Kq sin. (G + H + K) suchen; es ist nemlich $G = 44^\circ$, $G + H = 149^\circ$, $G + H + K = 217^\circ$ und $p = 45^\circ$.

Log.

Log. GH	=	1,8573325
Log. sin. 44°	=	9,8417713 — 10
Log. prod.	=	1,6991938
Log. sin. 45°	=	9,8494850 — 10
Log. Quot	=	1,8496188
Quot.	=	+ 70,732.

Log. HK	=	2,2405492
Log. sin. 149°	=	9,7118393 — 10
Log. prod.	=	1,9523885
Log. sin. 45°	=	9,8494850 — 10
Log. Quot.	=	2,1029035
Quot	=	+ 126,737.

Loq. Kq	=	1,7269064
Log. sin. 217°	=	9,7794630 — 10
Log. prod.	=	1,5063694
Log, sin. 45°	=	9,8494850 — 10
Log. Quot.	=	1,6568844
Quot	=	— 45,382.

Mithin ist pq = 70,732 + 126,737 — 45,382 = 152,087.

Durch eine, auch nur beyläufige Messung auf dem Papier findet man, daß die zweyte Theilungslinie p′q′ die FE und LA schneiden müsse; man muß also in den Poligone p′FpqLq′ die Seiten Fp′ und Lq suchen. Man setze Fp′ = y, Lq′ = x, so ist y sin, p′ = x

sin,

sin. q′ + Lq sin. (q + L) + qp sin (q′ + L + q) + pF sin. (q′ + L + q + p) (§. 28.) Es ist aber q′p′F + β + G + F (§. 18.) = 91° + 44 − 59° = 76°, p′ = 104, p′q′L = α + K + L = 14° + 68° − 24° = 58°, q′ = 122°, q = 82°, und p = 135°; weil pqK und Gpq die eigentlichen Nebenwinkel des vorhabenden Poligons p′FpqLq′ sind. Daraus hat man ferner q + L = 98°, q′ + L + q = 180°, und q′ + L + q + p = 315. Ferner ist Lq = LK − Kq = 94,292 − 53,322 = 40,970, pF = GF − Gp = 122 − 32,373 = 89,627, und pq = 152,087.

Log. Lq	=	1,6124660	
Log. sin. 98°	=	9,9957528	− 10
Log. prod.	=	1,6082128	
Log. sin. 104°	=	9,9369041	− 10
Log. Quot.	=	1,6213146	
Quot	=	+ 41,813.	

Log. pF	=	1,9524389
Log. sin. 315°	=	9,8494850
Log. prod.	=	1,8019239
Log. sin. 104°	=	9,9869041
Log. Quot.	=	1,8150108
Quot.	=	− 65,316.

Log.

Log. sin. 122° = 9,9284295 — 10
Log. sin. 104° = 9,9869041 — 10
Log. Quot. = 0,9415164 — 1
Quot. = + 0,87401

Folglich ist $y = p'F = x.\ 0{,}87401 + 41{,}813 - 65{,}316 = x.\ 0{,}87401 - 23{,}503 = ax - b$, wenn man nemlich $0{,}87401 = a$, und $23{,}503 = b$ setzet.

Diesen Werth für $p'F$ setze man in die Gleichung, welche den Flächenraum des Poligons $p'Fp\ qLq'$ ausdrückt; als:

$2m = p'F.\ Fp\ \sin.\ F + p'F\ pq\ \sin.\ (F + p) + p'F.\ qL\ \sin\ (F + p + q) + \text{------}$ (§. 56.) so bekömmt man folgendes.

$2m = ax.\ Fp\ \sin.\ F + ax.\ pq.\ \sin.\ (F + p) + ax.\ qL\ \sin.\ (F + p + q) + ax^2\ \sin.\ (F + p + q + L) - b.\ Fp.\ \sin.\ F - b.\ pq.\ \sin.\ (F+p) - b.\ qL\ \sin.\ (F + p + q) - bx\ \sin.\ (F + p + q + L) + Fp.\ pq.\ \sin.\ p + Fp.\ qL\ \sin.\ (p + q) + x.\ Fp.\ \sin.\ (p + q + L) + pq.\ qL.\ \sin.\ q + x.\ pq.\ \sin.\ (q + L) + x.\ qL\ \sin.\ L$, und es ist $F = -\ 59°$, $p = 135°$, $q = 82°$, $L = -\ 24°$,

$F + p = 76°$, $F + p + q = 158°$, $F + p + q + L = 134°$, $p + q = 217°$, $p + q + L = 193°$, $q + L = 58°$, und $m = 11299{,}213$, daher $2m = 22598{,}426$, und die Rechnung stehet so:

Log.

Log. a	=	0,9415164 — 1
Log. pF	=	1,9524388
Log. ſin. (—59°	=	9,9339656 — 10
Log. prod.	=	1,8270209
prod.	=	— 67,146.
Log. a	=	0,9415164 — 1
Log. pq	=	2,1820922
Log. ſin. 76°	=	9,9869041 — 10
Log. prod.	=	2,1105127
prod.	=	+ 128,977.
Log. a	=	0,9415161 — 1
Log qL	=	1,6124660
Log. ſin. 158°	=	9,5735754 — 10
Log. prod.	=	1,1275578
prod.	=	+13,414.
Log. a	=	0,9415164 — 1
Log. ſin. 134°	=	9,8569341 — 10
Log. prod.	=	0,7984505 — 1
prod.	=	+ 0,629.
Log. b	=	1,3711233
Log. pF	=	1,9524389
Log. ſin. (— 59)	=	9,9330656 — 10
Log. prod.	=	3,2566278
prod	=	— 1805,626.

Log. b	=	9,3711233
Log. pq	=	2,1820922
Log. ſin. 76°	=	9,9869041 — 10
Log. prod.	=	3,5401196
prod.	=	+ 3468,323.

Log. b	=	1,3711233
Log. qL	=	1,6124660
Log. ſin. 158°	=	9,5735754 — 10
Log. prod.	=	2,5571647
prod.	=	+ 360,415

Log. b	=	1,3711233
Log. ſin. 134°	=	9,8569341 — 10
Log. prod.	=	1,2280574
prod.	=	+ 16,907.

Log. pF	=	1,9524389
Log. pq	=	2,1820922
Log. ſin. 135°	=	98,494850 — 10
Log. prod.	=	3,9840161
prod.	=	+ 9638,647.

Log. pF	=	1,9524389
Loq qL	=	1,6124660
Log. ſin. 217°	=	9,7794630 — 10
Log. prod.	=	3,3443679
prod.	=	2209,875.

Log.

Log. pF	=	1,9524389
Log sin. 193°	=	9,3520880 — 10
Log. prod.	=	1,3045269
prod	=	— 20,162.

Log. pq	=	2,1820922
Log. qL	=	1,6124660
Log. sin. 82°	=	9,9957528 — 10
Log prod.	=	3,7903110
prod.	=	+ 6170,366.

Log. pq	=	2,1820922
Log. sin. 58°	=	9,9284205 — 10
Log. prod.	=	2,1105127
prod.	=	+ 128,977.

Log. qL	=	1,6124660
Log. sin.(—24°)	=	9,6093133 — 10
Log. prod.	=	1,2217793
prod.	=	— 16,664.

Demnach ist 22598,446 = — x. 67,146 + x. 128,997 + x. 13,414 + x^2, 0,629 + 1805,626 — 3468,323 — 360,715 — x. 16,906 + 9638, 647 — 2209.875 — x. 20,162 + 6170,366 + x. 128,977 — x. 16,664. das ist nach gehöriger Reduktion und Ordnung der Glieder x^2 + x. 239, 364 — 17039,490 = 0, woraus man endlich x = 170,097 — 119,682 = 50,415 erhält, und ferner,

$Fp' = y = ax - b = 0.87401 + 50,415 - 23,503 = 20,560$. Trägt man demnach 50,415 aus L in q', und 20,560 aus F in p', und zieht p'q', so ist diese mit MN parallel, und $p'FpqLq' = 11299,212$.

Nun hat man noch aus der Gleichung p'q' sin. p = Fp sin. F + pq sin. (F + p) + qL sin, (F + p + q) + Lq' sin. (F + p + q + L) die Grösse der Linie p'q' zu suchen, damit man hernach in dem Poligon p''Ep'q'Aq'' die Punkte p'' und q'', durch welche die dritte Theilungslinie gehen soll, bestimmen könne.

Man kann aber auch die Punkte p'' und q'' aus dem Polignon p''q''BCDp'' bestimmen, indem man die Seiten Dp'' und Cq'' suchet, in welchem Falle man die Grösse der p'q' nicht zu berechnen braucht.

§. 67.

Anmerkung.

Wenn bey Auflösung der letzten Gleichung, wodurch x z. B. Gp bestimmet wird, $x > GF$ gefunden wird, unerachtet man die Wurzelgrösse mit dem Zeichen — nimmt, so ist dieses ein Beweis, daß die pq nicht, wie voraus gesetzt worden ist, die Linie GF, sondern die FE schneiden müsse. Eben so ist es ein Zeichen, daß die Theilungslinie pq nicht

durch

durch GF; sondern durch die Linie HG durchgehe, wenn man x, unerachtet man das Wurzelzeichen mit + nimmt, negativ findet. In beyden Fällen muß man also die Rechnung wiederholen.

§. 68.

Anmerkung.

Je mehrere Winkel zwischen einer gefundenen Theilungslinie, und der ihr zunächst folgenden enthalten sind, desto mehr Glieder enthält die letzte quadratische Gleichung, wodurch die nächste Theilungslinie bestimmt wird. Diese Anzahl der Glieder, läßt sich auf folgende Weise bestimmen. Die Anzahl der Glieder der Formel, in der y'' durch x ausgedrückt wird, enthält $n - 2$ Glieder, diese Formel wird aber in Zahlen auf zwey Glieder, welche die Form $ax + b$ haben, reduziert; folglich wenn dieser Werth für y'' in der Formel, welche den Quadratinhalt der Figur ausdrückt, gesetzt wird, und welche allzeit $(n - 1)(n - 2) : 2$ Glieder enthält, so wird letztere noch um $n - 2$ Glieder vermehrt; weil die Größe y in den ersten $n - 2$ Gliedern vorkömmt. Mithin ist die ganze Anzahl der Glieder der quadratischen Gleichung $= (n - 1)(n - 2) : 2 + n - 2 = (n + 1)(n - 2) : 2$.

Zähle

Zählt man noch die $n-2$ Glieder der ersten Formel, in der y durch x ausgedrückt wird, hinzu, so ist die Anzahl aller Glieder beyder Formeln, die man berechnen muß, ehe man an die letzte quadratische Gleichung kömmt, $=(n+1)(n-2):2+n-2=(n+3)(n-2):2$. So z. B. mußte man in dem vorigen Beyspiele $(6+3)(6-2):2=18$ Glieder in Zahlen berechnen, ehe man an die quadratische Gleichung kommen konnte, wodurch der Punkt p' bestimmet wurde, weil zwischen pq und pq' sechs Winkel enthalten sind.

§. 69.

Anmerkung.

Der in (§. 67) angemerkte Umstand, daß man erst am Ende der Rechnung erfährt, ob nicht dieselbe ganz fruchtlos gewesen, und von vorne wieder angefangen werden müße, und denn die beträchtliche Menge der Glieder, die man bey jeder Theilungslinie berechnen muß, machen diese Theilungslungsart in der Ausübung nicht sehr empfehlenswerth, unerachtet ihres regelmäßigen und leicht zu übersehenden Fortganges. Die folgende Art aber ist diesen Unbequemlichkeiten nicht unterworfen.

§. 70.

Eine andere Theilungsart.

Man ziehe durch alle Winkelpunkte der zu theilenden Figur (Fig. 32.), die mit MN parallelen Kk, Gg, Ll, Ff u. s. w. so zerfällt die ganze Figur höchstens in n — 1 Theile (wenn die Anzahl der Seiten = n ist;) wovon höchstens zwey Dreyecke; die übrigen aber Trapezien sind. Alle diese Parallelen sowohl, als auch alle Senkrechte, die man aus allen Winkelpunkten der Figur auf die MN ziehen kann, berechne man nach der in den §§. 53 und 26 gegebenen Anleitung, so kann man hernach die Quadratinhalte aller dieser Trapezien und Dreyecke nach der gewöhnlichen Weise berechnen, und das übrige, was noch hiebey zu thun ist, nach den §§. 61. und 62 finden. Folgendes Beyspiel soll die Sache erläutern:

§. 71.

Beyspiel.

Es sey in Figur 32 wieder alles so wie in (§. 66.) angenommen worden ist,

AB	= 84	LAB	= + 126°	A	= + 54°
BC	= 54	ABC	= — 154°	B	= — 26°
CD	= 97	BCD	= + 126°	C	= + 54°
DE	= 140	CDE	= + 71°	D	= + 109°

DEF

EF	= 98	DEF	= + 145°	E	= + 35°
FG	= 122	EFG	= — 121°	F	= — 59°
GH	= 72	FGH	= + 136°	G	= + 44°
HK	= 174	GHK	= + 75°	H	= + 105°
KL	= 94,292	HKL	= + 112°	K	= + 68°
LA	= 64,235	KLA	= — 156°	L	= — 24°

und NHK $= \alpha = 14°$, so ist MHG $= \beta = 180° - \alpha - $ GHK $= 91°$,

Berechnung der Parallelen.

Kk sin. k = HK sin. H und es ist k 180° — HkK = 180° — β = 180° — 91° = 89° (§. 53.).

Log. HK	= 2,2405492
Log. sin. 105°	= 9,9849438 — 10
Log. prod.	= 2,2254930
Log. sin. 89°	= 9,9999338 — 10
Log. Quot.	= 2,2255592
Quot.	= + 168,093 = Kk

Gg sin. g = KH sin. K + HG sin. (K + H), g = 180° — (α + K) = 180° — 82 = 98°, K + H = 173°.

Log. HK	= 2,2405492
Log. sin. 68°	= 9,9671659 — 10
Log. prod.	= 2,2077151
Log. sin. 98°	= 9,9957528 — 10
Log. Quot.	= 2,2119623
Quot.	= + 162,915.

Log.

Log. HG = 1,8573325
Log. ſin. 173° = 9,0858945 — 10
Log. prod. = 0,9432270
Log. ſin. 98° = 9,9957528 — 10
Log. Quot. = 0,9474742
Quot. = + 8,861, daher iſt
Gg = 162,915 + 8,861 = 171,776.

Ll. ſin. l = GH ſin. G + HK ſin. (G + H) + KL ſin. (G + H + K). Und es iſt l = 180 — (β+G) = 180° — 135 = 45°, G+H = 149°, und G+H + K = 217°.

Log. GH = 1,8573325
Log. ſin. 44° = 9,8417713 — 10
Log. prod. = 1,6991038
Log. ſin. 45° = 9,8494850 — 10
Log. Quot. = 1,8496188
Quot. = + 70,732.

Log. HK = 2,2405492
Log. ſin. 149° = 9,7118393 — 10
Log. prod. = 1,9523885
Log. ſin. 45° = 9,8494850
Log. Quot. = 2,1029035
Quot. = + 126,737.

Log. KL	=	1,9744748
Log. sin. 217°	=	9,7794630 — 10
Log. prod.	=	1,7539378
Log. sin. 45°	=	9,8494850
Log. Quot.	=	1,9044528
Quot.	=	— 80,251, daher ist

Ll = 70,732 + 126,737 — 80,251 = 117,218.

Ff sin. f = LK sin. L + KH sin. (L + K) + HG sin. (L + K + H) + GF sin. (L - - - - G) es ist aber f = 180° — (α + K + L) = 180° — 58° = 122°, L + K = 44°, L + K + H = 149°, und L + K + H + G = 193°.

Log. LK	=	1,9744748
Log. sin. (— 24°)	=	9,6093133 — 10
Log. prod.	=	1,5837881
Log. sin. 122°	=	9,9284205 — 10
Log. Quot.	=	1,6553676
Quot.	=	— 45,224.

Log. KH	=	2,2405492
Log. sin. 44°	=	9,8417713 — 10
Log. prod.	=	2,0823205
Log. sin. 122°	=	9,9284205 — 10
Log. Quot.	=	2,1539000
Quot.	=	— 142,528.

Log.

Log. HG = 1,8573325
Log. sin. 149° = 9,7118393 — 10
Log. prod. = 1,5691718
Log. sin. 122° = 9,9284205 — 10
Log. Quot. = 1,6407513
Quot. = + 43,727

Log. GF = 2,0863598
Log. sin. 193° = 9.3520880 — 10
Log. prod. = 1,4384478
Log. sin. 122° = 9,9284205 — 10
Log. Quot. = 1,5100273
Quot. = — 32,361. Folglich ist Ff = — 45,224 + 142,528 + 43,727 — 32,361 = 108,670.

Aa sin. a = FG sin. F + GH sin. (F + G) + HK sin. (F + G + H) + KL sin. (F --- K) + LA sin. (F ---- L), und es ist a = 180° — (β + G + F) = 180° — 76° = 104, F + G = — 15, F + G + H = 90°, F + ---- K = 158°, und F + ---- L = 134°

Log. FG = 2,0863598
Log. sin. (— 59°) = 9,9330656 — 10
Log. prod. = 2,0194254
Log. sin. 104° = 9,9869041 — 10
Log. Quot. = 2,0325213
Quot. = — 107,776.

Log.

Log. GH	= 1,8573325	
Log. sin. (– 15°)	= 9,4129962	— 10
Log. prod.	= 1,2703287	
Log. sin. 104°	= 9,9869041	— 10
Log. Quot.	= 1,2834246	
Quot.	= — 19,205.	
Log. HK	= 2,2405492	
Log. sin. 90°	= 10,0000000	— 10
Log. prod.	= 2,2405492	
Log. sin. 104°	= 9,9869041	— 10
Log. Quot.	= 2,2536451	
Quot.	= + 179,327.	
Log. KL	= 1,9744748	
Log. sin. 158°	= 9,5735754	— 10
Log. prod.	= 1,5480502	
Log. sin. 104°	= 9,9869041	— 10
Log. Quot.	= 1,5611461	
Quot.	= = + 36,404.	
Log. LA	= 1,8077717	
Log. sin. 134°	= 9,8569341	— 10
Log. prod.	= 1,6647058	
Log. sin. 104°	= 9,9869041	
Log. Quot.	= 1,6778017	
Quot.	= + 47,621. Daher ist	

$Aa = -107{,}776 - 19{,}205 + 179{,}327 + 36{,}404 + 47{,}621 = 136{,}371$.

$Ee \sin. e = BC \sin. B + CD \sin. (B+C) + DE \sin. (B+C+D)$. $e = 180^\circ - (\alpha + K + L + A) = 180 - 112^\circ = 68^\circ$, $B + C = 28^\circ$, und $B + C + D = 137^\circ$.

Log. BC	=	1,7323938
Log. sin. (−26°)	=	9,6418420 — 10
Log. prod.	=	1,3742358
Log. sin. 68°	=	9,9671659 — 10
Log. Quot.	=	1,4070699
Quot	=	— 25,531.

Log. CD	=	1,9867717
Log. sin. 28°	=	9,6716093 — 10
Log. prod.	=	1,6583810
Log. sin. 68°	=	9,9671659 — 10
Log. Quot.	=	1,6912151
Quot.	=	+ 49,115.

Log. DE	=	2,1461280
Log. sin. 137°	=	9,8337833 — 10
Log. prod.	=	1,9799113
Log. sin. 68°	=	9,9671659 — 10
Log. Quot.	=	2,0127454
Quot.	=	+ 102,978.

Daher

hat

hat man Ee = — 25,531 + 49,115 + 102,978 = 126,562.

Bb sin. b = DC sin. D + CB. sin. (D + C), und es ist b = β + G + F + E = 111°, und D + C = 163°.

Log. DC	=	1,9867717
Log. sin. 109°	=	9,9756701 — 10
Log. prod.	=	1,9624418
Log. sin. 111°	=	9,9701517 — 10
Log. Quot.	=	1,9922901
Quot.	=	+ 98,240.

Log. CB	=	1,7323938
Log. sin. 163.°	=	94659353 — 10
Log. prod.	=	1,1983291
Log. sin. 111°	=	9,9701517 — 10
Log. Quot.	=	1,2281774
Quot.	=	+ 16,911.

Folglich ist Bb = 98,240 + 16,911 = 115,151.

Cc sin. c = DC sin. D, und es ist c = b = 111°.

Log. DC	=	1,9867717
Log. sin. 109°	=	9,9756701 — 19
Log. prod.	=	1,9624418
Log. sin. 111°	=	9,9701517 = 10
Log. Quote	=	1,9922901.
Quot.	=	+ 98,240 = Cc.

Be-

Berechnung der Senkrechten.

Kk' = HK sin. α (§.26.) und es ist $\alpha = 14°$.

Log. HK	=	2,2405492
Log. sin. 14°	=	93836752 — 20
Log. prod.	=	1,6242244
prod.	=	+ 42,094 = Kk'

Ll' = Kk' + KL sin. (α + K), α + K = 82°.

Log. KL	=	1,9744748
Log. sin. 82°	=	9,9957428 — 10
Log. prod.	=	1,9702276
prod.	=	+ 93,374
Kk	=	+ 42,094
Ll'	=	+ 135,468

Aa' = Ll' + LA sin. (α + K + L), α + K + L = 58.

Log. LA	=	1,8077717
Log. sin. 58°	=	9,9284205 — 10
Log. prod.	=	1,7361922
prod.	=	+ 54,474
Ll'	=	+ 135,468
Aa'	=	+ 189,942

Bb' = Aa' + AB sin. (α + K + L + A), α+K + L + A = 112°

Log. AB	=	1,9242793
Log. sin. 112°	=	9,9761659 — 10
Log. prod.	=	1,8914452

prod. = + 77,884.
Aa′ = + 189,942
Bb′ = + 267,825

Cc′ = Bb + BC fin. (α + ---- B), α + K + ---- B = 86°.

Log. BC = 1,7323938
Log. fin. 86° = 9,9989408 — 10
Log. prod. = 1,7313346
prod. = + 53,868
Bb′ = + 267,825
Cc′ = + 321,693

Dd′ = Cc′ + CD fin. (α ---- C), α + K --- C = 140°.

Log. CD = 1,9867717
Log. fin. 140° = 9,8080675 — 10
Log. prod. = 1,7948392
prod. = + 62,350
Cc′ = + 321,693
Dd′ = + 384,043

Ee′ = Dd′ + DE fin. (α + K + L ---- D), α ---- D = 249°.

Log. DE = 2,1461280
Log. fin. 249° = 9,9701517 — 10
Log. prod. = 2,1162797
prod. = — 130,701
Dd′ = + 384,443
Ee′ = + 253,342

$Ff' = Ee' + EF \sin. (\alpha + K - - - - - - - E)$, $\alpha + K - - - - - - - E = 284^\circ$.

Log. EF	=	1,9912261
Log. sin. 284°	=	9,9869041 — 01
Log. prod.	=	1,9781302
prod.	=	— 95,089
Ee'	=	+ 253,342
Ff'	=	+ 158,253

$Gg' = Ff' + FG \sin. (\alpha - - - - - - - F)$, $\alpha + - - - F = 225^\circ$.

Log. FG	=	2,0863598
Log. sin. 225°	=	9,8494850 — 10
Log. prod.	=	1,9358448
prod.	=	— 86,267
Ff'	=	+ 158,253
Gg'	=	+ 71,986.

Der Bequemlichkeit wegen schreibe man die Grössen aller gefundenen Paralellen sowohl als aller Senkrechten in folgendes Täfelchen zusammen.

Paralellen.

Kk = 168,093	Daraus	½(Kk+Gg)=169,9345
Gg = 171,776	erhält	½(Ll+Gg)=144,4970
Ll = 117,218	man	½(Ff + Ll)=112,9440
Ff = 108,670		½(Aa+Ff)=122,5202
Aa = 136,371		½(Ee+Aa)=131,4665
Ee = 126,562		½(Bb+Ee)=120,8565

$Bb = 115,151$ $\frac{1}{2}(Cc + Bb) = 106,6955$

$Cc = 98,248$

Senkrechte.

$Kk' = 42,094$	Daraus	$Gg' - Kk' = 29,892$
$Ll' = 135,468$	erhält	$Ll' - Gg' = 63,482$
$Aa' = 189,942$	man	$Ff' - Ll' = 22,785$
$Bb' = 267,825$		$Aa' - Ff' = 31,689$
$Cc' = 321,693$		$Ee' - Aa' = 63,400$
$Dd' = 384,043$		$Bb' - Ee' = 14,483$
$Ee' = 253,342$		$Cc' - Bb' = 53,868$
$Ff' = 158,253$		$Dd' - Cc' = 62,350$
$Gg' = 71,986$		

Aus den gefundenen Paralellen und Senkrechten berechnet man die Inhalte aller Trapezien und Dreyecke, als:

Dreyeck $KkH = Kk. Kk' : 2$

$$\text{Log. } \tfrac{1}{2}\, Kk = 1,9245196$$
$$\text{Log. } Kk' = 1,6242202$$
$$\text{Log. prod} = 3,5487398$$
$$\text{prod.} = 3537,852$$

Trapezinm $KkGg = \frac{1}{2}(Kk + Gg)(Gg' - Kk')$

$$\text{Log. } \tfrac{1}{2}(Gg + Kk) = 2,2302816$$
$$\text{Log. } (Gg' - Kk') = 1,4755550$$
$$\text{Log. prod.} = 3,7058366$$
$$\text{prod.} = 5079,682$$

Trapezium $GgLl = \frac{1}{2}(Ll + Gg)(Ll' - Gg')$

Log.

Log. $\frac{1}{2}$ (Ll + Gg) = 2,1598588
Log. (Ll' — Gg') = 1,8026506
Log. prod. = 3,9625094
prod. = 9172,956

Trapezium LlFf = $\frac{1}{2}$ (Ff + Ll) Ff — Ll')
Log. $\frac{1}{2}$ (Ff + Ll) = 2,0528631
Log. (Ff' — Ll') = 1,3576490
Log. prod. = 3,4105123
prod. = 2573,429

Trapezium FfAa = $\frac{1}{2}$ (Aa+Ff) (A'a' — Ff'.)
Log. $\frac{1}{2}$ (Aa + Ff) = 2,0882088
Log. (Aa' — Ff') = 1,5009085
Log. prod. = 3,5891173
prod. = 3882,552.

Trapezium Aa Ee = $\frac{1}{2}$ (Ee + Aa) (Ee' — Aa').
Log. $\frac{1}{2}$ (Ee + Aa) = 2,1188150
Log. (Ee' — Aa') = 1,8020893
Log. prod. = 3,9209043
prod. = 8334,976.

Trapezium BbEe = $\frac{1}{2}$ (Ee + Bb) (Ee' — Bb').
Log. $\frac{1}{2}$ (Ee + Bb) = 2,0822702
Log. (Bb' — Ee') = 1,1608585
Log. prod. = 3,2431287
prod. = 1750,365.

Tra-

Trapezium BbCc $= \frac{1}{2}(Cc + Bb)(Cc' - Bb')$.

Log. $\frac{1}{2}(Cc + Bb) = 2,0281461$

Log. $(Cc' - Bb') = 1,7313309$

Log. prod. $= 3,7594770$

prod. $= 5747,474$.

Dreyeck CcD $= \frac{1}{2}$ Cc (Dd' — Cc').

Log. $\frac{1}{2}$ Cc $= 1,6912584$

Log. $(Dd' - Cc') = 1,7948365$

Log. prod. $= 3,4860949$

prod. $= 3062,632$.

Addiert man alle diese Produkte zusammen, so erhält man für den Inhalt der ganzen Figur 43141,918, welches von der oben in (§. 66.), wiewohl aus ganz andern Grössen berechneten Summe 43142,452, nur um 0,507 abweichet, welches bloß von der Unvollkommenheit der Tabellen herrühret.

Der Einfluß, den diese 0,507 auf die Bestimmung der Lage der Theilungslinien haben kann, ist, wenn die Rechnung nur bis auf drey Dezimalstellen geführet wird, wie leicht zu erachten, ganz unbeträchtlich. Man kann also die eine oder die andere Zahl in die Rechnung brauchen, ohne einen Irrthum besorgen zu dürfen. Ich werde die zuletzt gefundene Zahl 43141,918 beybehalten.

Aus

Aus den Verhältnissen 12, 11, 10, 9 welche die verlangten Theile unter sich haben sollen, findet man die wirkliche Größe dieser Theile 12326, 262, 11299,074, 10271,885, und 9244,697, und man sieht sogleich, daß man zu dem Dreyecke KkH und dem Trapezium KkGg deren Summe 8617,534 ist, noch ein Trapezium Ggpq, dessen Inhalt 12326,262 — 8617,534 = 3708,728 ist, hinzuthun müße, um den ersten Theil 12326,262 zu bekommen.

Man hat demnach in dem Trapezium Ggpq, dessen Inhalt 3708,728 seyn soll, die Seiten Gp und gq nach (§. 62.) zu suchen. Man setze nämlich $Gp = x$, $gq = y$, $3708{,}728 = m$ so ist $x\,\text{sin.}\,p = y\,\text{sin.}\,q$, und daher $y = x\,\text{sin.}\,p : \text{sin.}\,q$. Ferner ist $2m = x.\,Gg\,\text{sin.}\,G. + xy.\,\text{sin.}\,(G+g) + y.\,Gg.\,\text{sin.}\,g$. Es ist aber $\text{sin.}\,G = \text{sin.}\,p$, $\text{sin.}\,g = \text{sin.}\,q$, und $\text{sin.}\,(G+g) = \text{sin.}\,(360^\circ - p - q)$ (§. 9.) $= -\text{sin.}\,(p+q)$ (§. 21.); werden diese Werthe in der vorigen Gleichung gesetzt, so ist $2m = 2x.\,Gg\,\text{sin.}\,p - x^2\,\text{sin.}\,(p+q).\,\text{sin.}\,p : \text{sin.}\,q$. Aus dieser Gleichung erhält man $x = Gg\,\text{sin.}\,q : \text{sin.}\,(p+q) \pm \sqrt{Gg^2.\,\text{sin.}\,q^2 : \text{sin.}\,(p+q)^2 - 2m\,\text{sin.}\,q : \text{sin.}\,p.\,\text{sin.}\,(p+q)}$, oder wenn man der Kürze wegen $\text{sin.}\,q : \text{sin.}\,(p+q) = v$ setzet, $x = Gg.\,v \pm \sqrt{Gg^2.\,v^2 - 2m.\,v : \text{sin.}\,p}$.

Nun ist in dem gegenwärtigen Falle Gg = 171,776, 2m = 7417,456, p = 180° — (β + G) = 45° (§. 17.), q = 180° — (α + K) = 98°, und sin. q : sin. (p+q) = sin. 98 : sin. 143°, daher bekömmt die Rechnung beyläufig ein solches aussehen:

Log. sin. 98°	=	9,9957528 — 10
Log. sin. 143°	=	9,7794630 — 10
Log. Quot.	=	0,2162898
Quot.	=	1,645 = v.

Log. 2m	=	3,8702550
Log. v	=	0,2162898
Log. prod.	=	4,0865448
Log. sin. p	=	9,8494550 — 10
Log. Quot.	=	4,2370598
2m. v : sin. p = Quot.	=	17260,756.

Log. Gg	=	2,2349625
Log. v	=	0,2162898
Log. prod.	=	2,4512523
Log. Gg^2 v^2	=	4,9025046
Gg. v	=	282,652
Gg^2. v^2	=	79892,237.

Gg^2. v^2	=	79892,237
2m. v : sin. p	=	17260,756
$Gg^2.v^2$—2m.v : sin. p	=	62631,481

Log.

$$\text{Log. } 62631{,}481 = 4{,}7967927$$
$$\tfrac{1}{2} \text{ Log. } 62631{,}481 = 2{,}3983963$$
$$\sqrt{62631{,}481} = 250{,}263.$$

Dennoch ist $x = 282{,}652 - 250{,}263 = 32{,}389$, und daraus erhält man weiter $gq = y = x . \sin. p : \sin. q$, auch ist $Kg = h : \sin. g$, wenn man die Höhe des Trapeziums KkGg = $Gg' - Kk' = h$ setzet.

Log. x	=	1,5103975
Log. sin. p	=	9,8494850 — 10
Log. prod.	=	1,3598825
Log. sin. q	=	9,9957528 — 10
Log. Quot.	=	1,3641297
Quot.	=	23,128 = gq.

Log. h	=	1,4755550
Log. sin. g	=	9,9957528 — 10
Log. Quot.	=	1,4798022
Quot.	=	30,186 = Kg
gq	=	23,128
kq	=	53,314.

Man trage demnach 32,389 aus G in p, und 53,314 aus k in q, und ziehe pq, so wird diese mit MN parallel, und pqKHGp = 12326,262.

Man

Man ziehe das Trapezium Ggpq = 3708,728 von dem Trapezium GgLl = 9172,956 ab, und addire zum Ueberreste noch das Trapezium LlFf = 2573,429, so ist die Summe 8038,157, und da der zweyte Theil 11299,074 seyn soll, so sieht man sogleich, daß man noch ein Trapezium Ffp'q' dessen Inhalt 11299,074 — 8038,157 = 3260,917 hinzuthun müße, um den verlangten Theil zu bekommen; man hat also die Seiten Fp' und fq' des Trapeziums Ffq'p' zu suchen.

Man setze, wie vorhin Fp' = x, und fq' = y, so hat man nach der vorhin gefundenen Formel $Fp' = Ff.v + \sqrt{Ff^2.v^2 - 2m.v : \sin. p'}$, wenn man nemlich Ff, sin. p', sin. q' und sin. (p' + q') anstatt der vorigen Gg, sin. p, sin. q und sin. (p+q) setzet. Es ist aber hier 2m = 6521,834, Ff = 108,670, $p' = 180° - (\beta + G + F)$ (§. 17.) = 104°, $q' = 180° - (\alpha + K + L)$ = 122°, und p' + q' = 226°.

Log. sin. 122° = 9,9284205 — 10
Log. sin. 226° = 9,8569341
Log. Quot. = 0,0714864
Quot. = 1,179 = v.

Log.

Log. 2m = 3,8143698
Log. v. = 0,0714864
Log. prod. = 3,8858562
Log. sin. p' = 9,9865041 — 10
Log. Quot. = 3,8989521
2m. v: sin. p. = — 7924,140.

Log. Ff = 2,0361097
Log. v. = 0,0714864
Log. Ff. v. = 2.1075961
Log. Ff². v² = 4,2151922
Ff. v. = — 128,114
Ff². v² = 16413,156.

Ff² v² = 16413,156
— 2m. v : sin. p. = 7924,140
Rest = 24337,296
Log. 24337296 = 4,3862723
½ Log. 24337,296 = 2,1931076
$\sqrt{24337,296}$. = 155,994.

Daher hat man Fp' = + 128 + 155,994 = 27,880, weil nur das obere Zeichen hier brauchbar ist. Ferner ist fq' = x. sin. p' : sin. q und Lf = h : sin. f, wenn man die Höhe des Trapeziums LlFf = Ff — Ll = h setzet.

Log.

$$
\begin{aligned}
\text{Log. Fp}' &= 1{,}4452928 \\
\text{Log. sin. p}' &= 9{,}9869041 - 10 \\
\text{Log. prod.} &= 1{,}4321996 \\
\text{Log. sin. q}' &= 9{,}9284205 - 10 \\
\text{Log. Quot.} &= 1{,}5037764 \\
\text{Quot.} &= 31{,}899 = \text{fq}'.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\text{Log. h} &= 1{,}2576490 \\
\text{Log. sin. f} &= 9{,}9284205 - 10 \\
\text{Log. Quot.} &= 1{,}4292285 \\
\text{Quot.} &= 26{,}868 = \text{Lf} \\
\text{fq}' &= 31{,}899 \\
\text{Lq}' &= 58{,}767.
\end{aligned}
$$

Man trage also 27,880 aus F in p', und 58,767 aus L in q', und ziehe p'q', so ist diese mit MN paralell, und p'q'Lqp = 11299,074.

Man ziehe das Trapezium p'q'Ff = 3260,917 von dem Trapezium FfAa = 3882,552 ab, und addiere zum Ueberreste 581,635 noch das Trapezium AaEe, so ist die Summe 8916,611; da nun der dritte Theil 10271,885 seyn soll, so muß zu dieser Summe noch ein Trapezium Eep''q'' addieret werden, dessen Inhalt = 10271,885 — 8916,611 = 1355,274 ist, setzet man nun wieder Ep'' = x, eq'' = y, so hat man nach der allgemeinen Formel y = x

sin.

$\sin. p'' : \sin. q''$ und $x = Ee.\, v \pm \sqrt{Ee^2.\, v^2 - 2mv : \sin. p''}$ und es ist $Ee = 126{,}562$, $2m = 2710{,}548$, $p'' = 180° - (\beta + G + F + E) = 69°$, $q'' = 180° - (\alpha + K + L + A) = 68°$, und $p'' + q'' = 137°$.

Log. sin. q''	=	9,9671659 — 10
Log. sin. (p''+q'')	=	9,8337833 — 10
Log. Quot.	=	0,1333826
Quot.	=	1,360 = v.

Log. 2m	=	3,4330571
Log. v.	=	0,1333826
Log. prod.	=	3,5664397
Log. sin. p''	=	9,9701517 — 10
Log. Quot.	=	3,5962880
Quot.	=	3947,190.

Log. Ee	=	2,1023034
Log. v.	=	0,1333826
Log. Ee. v.	=	2,2356860
Log. $Ee^2.\ v^2$	=	4,4713720
Ee. v	=	172,062
$Ee^2.\ v^2$	=	29605,468.

Ee^2.

$Ee^2 . v^2$ ' = 29605,468
2m. v : sin. p'' = 3947,190
Rest = 25658,278
Log. des Restes = 4,4092275
$\frac{1}{2}$ Log. 25658,278 = 2,2046137
$\sqrt{25658,278}$ = 160,182.

Daher ist Ep'' = 172,062 ± 160,182 = 11,880, weil nur das untere Zeichen brauchbar ist, wegen Ep'' < ED. Ferner ist eq'' = Ep'' sin. p'': sin. q'', und Ae = h : sin. e = (Ee'—Aa') : sin. e.

Log. Ep'' = 1,0748164
Log. sin. p'' = 9,9701517 — 10
Log. prod. = 1,0449681
Log. sin. q'' = 9,9671659 — 10
Log. Quot. = 1,0778022
Quot. = 11,962 = eq''.

Log. h = 1,8020893
Log. sin. e = 9,9671659 — 10
Log. Quot. = 1,8349234
Quot. = 68,379 = Ae.
eq'' = 11,962
Aq'' = 80,341. Wird also 11,962 aus E in p'', und 80,341 aus A in q'' getragen, und die Linie p''q'' gezogen, so ist diese mit

mit MN paralell, und $p''q''Aq'p'E = 10271{,}885$, mithin ist auch $p''q''BCD$ der verlangte vierte Theil $= 9744{,}697$.

§. 72.

Anmerkung.

Wenn die Paralellen eine solche Lage haben, daß mehrere Seiten des Poligons von ihnen geschnitten werden wie in der drey u. dreyßigsten Figur, so muß man um die Inhalte aller Trapezien und Dreyecke berechnen zu können, alle Theile der Paralellen BB', BB'', BB''', CC', CC'', DD', DD'', DD''' u. s. w. jede besonders berechnen. Man suchet nemlich in der Figur $CC''FEDC$ die Seite CC'' und in dem Poligon $CC'EDC$ die Seite CC', so hat man hernach $C'C'' = CC'' - CC'$.

In dem Dreyecke BBC' suchet man BB', in der Fig. $BB''EDCB$, die BB'', und in der Fig. BB''' $FEDCB$ die BB''', so hat man hernach $B''B''' = BB'' - BB''$.

In dem Trapezium $BCDD'$ suche man DD' in dem Dreyecke $DD''E$ die Linie DD'', und in der Figur $DD''FED$ die Linie DD''', so ist hernach $D''D''' = DD''' - DD''$, u. s. w. alle diese Linien können nach (§. 41.) berechnet werden; weil in ieder dieser genannten Figuren nur zwey Seiten unbekannt sind. Die Berechnung der Senkrechten und des Flächenraumes und überhaupt die ganze übrige

Rech-

Rechnung wird so, wie im vorigen Paragraph gezeigt worden ist, geführt.

§. 73.

Aufgabe.

Ein Trapezium AFLE bestehet aus mehrern Trapezien und Dreyecken ABGF, BCHG, HCK, u. s. w. (Fig. 34) Der Werth einer Einheit, welche die Figur misset, z. B. eines Morgens, einer Quadrat-Ruthe oder eines Schuhes, und einer jeden dieser Theile sey p, q, r, s, t, ------ alle Winkel bey A, B, C, D u. s. w. nebst den Theilen der Linie FL, als: FG, GH, HK u. s. w. sind in Zahlen gegeben; man verlanget eine Linie ae mit FL paralell zu ziehen, so, daß das Trapezium ae LFa einem gegebenen Werth m gleich sey.

Auflösung.

Dan setze Fa $= x$, Gb $= y$, Hc $= z$, Kd $= v$, Kf $= w$, u. s. w. so ist nach (§. 71.)

$2FGab = 2x. \ FG \ \text{sin. } a - x^2 \ \text{sin. } a. \ \text{sin.} (Faa' + Gbc) : \text{sin. } b.$

$2GHcb = 2y. \ GH \ \text{sin. } b - y^2 \ \text{sin. } b. \ \text{sin.} (Gba + Hcd) : \text{sin. } c.$

$2HKdc = 2z. \ HK \ \text{sin. } c - z^2 \ \text{sin. } c. \ \text{sin.} (Hcb + Kdf) : \text{sin. } d.$

2Kdf

$2Kdf = o - v^2 \sin. d. \sin. (Kdc + Kfe) : \sin. f.$

$2KLef = 2w. KL \sin. f - w^2 \sin. f. \sin. (Kfd + Lee') : \sin. e'.$ u. s. w.

Ferner ist $x \sin. a = y \sin. b = z \sin. c = v \sin. d = w \sin. f$ u. s. w. (§. 28.) und daher ist auch $y = x. \sin. a : \sin. b$, $z = x. \sin. a : \sin. c$, $v = x. \sin. a : \sin. d$, $w = x \sin. a : \sin. f$, u. s. w. werden diese Werthe substituiert, so erhält man für den Flächenraum der Figur FaeL folgenden Ausdruck:

$2FGab = 2x. FG \sin. a - x^2 \sin. a^2. \sin. (Faa' + Gbc) : \sin. a. \sin. b.$

$2GHcb = 2x. GH \sin. a - x^2 \sin. a^2. \sin. (Gba + Hcd) : \sin. b. \sin. c.$

$2HKdc = 2x. HK \sin. a - x^2 \sin. a^2. \sin. (Hcb + Kde) : \sin. c. \sin. d.$

$2Kdf = o - x^2 \sin. a^2. \sin. (Kdc + Kfe) : \sin. d. \sin. f.$

$2KLfe = 2x. KL \sin. a - x^2 \sin. a^2. \sin. (Kfd + Lee') : \sin. e. \sin. f$, wovon der weitere Fortgang leicht einzusehen ist.

Man hat demnach folgende Gleichung des zweyten Grades aufzulösen:

$$2x.\sin.a\,(p.FG + q.GH + r.HK + t.KL + \text{------})$$
$$- x^2 \sin.a^2 \left\{ \begin{array}{l} p.\ \sin.(Faa' + Gbc) : \sin.a.\sin.b \\ + q.\ \sin.(Gba + Hcd) : \sin.b.\sin.c. \\ + r.\ \sin.(Hcb + Kde) : \sin.c.\sin.d. \\ + s.\ \sin.(Kdc + Kfe) : \sin.d.\sin.f. \\ + t.\ \sin.(Kfd + Lee') : \sin.f.\sin.e. \\ + \text{- - - - - - - - - - - - - - - -} \end{array} \right\} = 2m$$

Beyspiel.

Es sey FG = 70, FAA' = 56°, so ist Gbc = GBC = 114°,
GH = 62, GBA = 66°, Hcd = HCD = 128°,
HK = 124, HCA = 55°, Kdf = KCD = 67°,
KL = 76, KCA = 113°, Kfe = KDE = 93°,
KDA = 87°, Lee' = LEE = 108°,
LEA = 72°.

Ferner sey p, q, r, s, t = 3, 4, 5, 6, 7 und m = 112650, so ist, weil 3. 70 + 4. 62 + 5. 124 + 7. 76 = 1610 ist, $2x.\ 1610.\sin.56^\circ - x^2 \sin^2.56^\circ$ $(3 \sin.170^\circ + 4 \sin.191^\circ + 5 \sin.122^\circ + 6 \sin.206^\circ + 7 \sin.195^\circ) = 225300$. Nun ist

3. sin. 170°	=	3×0,1736482	=	0,5209446
4. sin. 191°	=—	4×0,1908090	=—	0,7632360
5. sin. 122°	=—	5×0,8480481	=	4,2402405
6. sin. 206°	=—	6×0,4383711	=—	2,6302266
7. sin. 195°	=—	7×0,2588190	=—	1,8117330
				— 0,4440105

Log.

Log. 1610 = 3,2068259
Log. sin. 56° = 9,9185742 — 10
Log. prod. = 3,1254001
prod. = 1335,750.

Log. 0,4440105 = 0,6473943 — 1
(Log. prod. $56^\circ)^2$ = 0,8371484 — 1
Log. prod. = 0,4845427 — 1
prod. = —0,3051706, folglich hat man die Gleichung 2x. 1335,750 + x^2.0,3051706 = 225300, oder nach gehöriger Reduktion und Ordnung der Glieder. x^2 + 2x. 4373,815 = 738275,68, aus welcher man endlich x = 83,568 erhält.

Und da ferner Fa sin. a = Le sin. e ist. (§. 28.) so ist Le = Fa sin. a : sin. e = 83,568. sin. 56° : sin. 108°.

Log. Fa = 1,9220400
Log. sin. 56° = 9,9185742 — 10
Log. prod. = 1,8406142
Log. sin. 108° = 9,9782063 — 10
Log. Quot. = 1,8624079
Quot. = + 72,846 = Le.

Wird daher 83,568 aus F in a, und 72,846 aus L in e getragen und ae gezogen, so ist diese mit FL parallel, und FLea = 112650 am Werthe.

§. 74.

Aufgabe.

Ein Poligon ADEFKL bestehet aus mehreren Theilen ABOHKL, BCPGHO, CDQFGP u. s. w. Die Werthe eines Morgens dieser Theile sind p, q, r, s, t u. s. w. (Fig. 35.) Alle Seiten und Winkel dieser Theile sind in Zahlen gegeben. Man soll dieses Poligon in mehrere Theile, deren Verhältniß gegeben ist, theilen, so zwar, daß alle Theilungslinien pq mit einer vorgegebenen Linie MN. parallel seyen.

Auflösung.

Man ziehe durch alle Winkelpunkte der Figur, MN Parallelen BB', CC'', DD'''', LL'''' u. s. w. so zerfällt die ganze Figur theils in Dreyecke, theils in Trapezien, in welchen alles bis auf zwey nebeneinander liegende Seiten bekannt ist. Man berechne alle diese Parallelen BB', CC', C'C'', DD', D'D'', D''D'', nach (§. 52. u. 72.), wie auch alle aus den gemeldten Winkelpunkten auf MN gezogene Senkrechte Bb, Cc, Dd u. s. w. nach (§.26.), so hat man auch die Höhe aller Dreyecke und Trapezien bekannt, wie bereits in (§. 71.) gezeigt worden ist.

Man berechne ferner die Inhalte aller dieser Dreyecke und Trapezien, und multipliziere einen jeden

den dieser Inhalte mit dem gegebenen Werthe p, q, r . . . eines Morgens desselben, addire alle diese Produkte, so hat man den Werth der ganzen Figur = A. Ist nun das gegebene Verhältniß der verlangten Theile m, n, o - - - - - so findet man die wirkliche Größe eines jeden Theiles = mA : (m + n + o - - - - - - -), nA : (m + n o - - - - -), oA : (m + n + o - - - -) u. s. w. und nun ist es leicht zu entscheiden, ob, und wie viel man noch von dem Trapezium B′BC″C zu dem Dreyecke ABB′, oder von dem Trapezium C″CL‴L zu dem Dreyecke ACC′ u. s. w. hinzuthun müße, um den ersten verlangten Theil mA : (m = n + o - - - -) zu haben, und im übrigen nach (§. 62.) zu verfahren, so wie bereits in (§. 71.) gezeigt worden ist. Eben so wird bey allen übrigen Theilungslinien verfahren.

§. 75.

Anmerkung.

Wenn die Seiten und Winkel der Figur nicht so, wie bisher angenommen worden, in Zahlen gegeben, sondern nur durch ihre Lage auf dem Papier gezeichnet sind, wie wenn die Figur mit dem Meßtische aufgenommen worden ist, so muß man alle Parallelen und Höhen aller Dreyecke und Trapezien mit dem Zirkel auf dem Papiere messen; das

übrige,

übrige, was noch hiebey zu thun ist, soll in den drey folgenden §§ gezeiget werden.

§. 76.

Aufgabe.

In einem Trapezium ABCD dessen parallele Seiten AB und CD sowohl, als dessen Höhe AE in Zahlen gegeben sind, soll eine Linie GH mit AB parallel gezogen werden (Fig. 36.), so daß ABGH einem gegebenen Inhalte m gleich sey.

Auflösung.

Man setze AB = a, AE = h, die Differenz beyder Parallelen = d, und die gesuchte Höhe = AK = x, so ist die untere Parallele CD = a + d; man denke sich nun die mit BD parallele AF, so hat man AE : AK = CF : GL, folglich GL = CF. AK : AE = $\frac{dx}{h}$; nun ist aber 2m = (AB + GH). AK = $(2a + \frac{dx}{h})\,x$, man erhält also aus dieser Gleichung

$$x = \sqrt{2mh : d + a^2 h^2 : d^2} - ah : d.$$

§. 77.

Zusatz.

Es ist zwar, wie aus der Auflösung zu sehen ist, die untere Parallelle CD > AB angenommen

men worden, man darf aber in dem entgegengesetz- ten Falle, nur $-\ d$ anstatt $+\ d$ in die gefundene Gleichung setzen, so hat man $2m = 2ax - \frac{dx^2}{h}$ für den Fall CD < AB (Fig. 37.) aufzulösen. Soll die gefundene Gleichung für ein Dreyeck ACD (Fig. 38), oder für ein Dreyeck ABC (Fig. 39.), dessen Spitze nach unten gekehret ist, passend seyn, so darf man nur im ersten Falle $a = o$, und im zweyten $a + d = o$, das ist, $a = -d$ setzen. Soll sich die Gleichung für ein Parallelogram schicken, so setzet man $d = o$. Man kann also die gefundene Gleichung $2m = 2ax + dx^2 : h$ als allgemein für alle itztgenannte Fälle passend gelten lassen, wenn nur bey der wirklichen Berechnung in Zahlen die Beschaffenheit des d und a in Acht genommen wird.

Man sehe hievon H. **Albrechts Euler Auflösung einiger geometrischen Aufgaben** im 5ten Bande der Abhandlungen der baierischen Akademie der Wissenschaften, aus welchem die Auflösung dieser Aufgabe größtentheils genommen ist.

§. 78.

Aufgabe.

Ein Trapezium FLEA (Fig. 34.) bestehet aus mehreren Stücken, welche theils Dreyecke, und

theils

theils Trapezien sind; die Werthe eines Morgens dieser Stücke, sind p, q, r. s, t - - - -; alle Parallelen FG, AB, GH, BC, HK, CD - - - - dieser Stücke sowohl, als ihre gemeinschaftliche Höhe MN sind in Zahlen gegeben, und man soll eine Linie ae mit FL parallel ziehen, so daß FLea einem gegebenen Werthe m gleich sey.

Auflösung.

Man benenne die oberen Parallelen mit a, a', a'', a''', a'''' - - - - und die Unterschiede zwischen diesen und ihren entsprechenden untern Parallelen AB, BC, CD - - - - mit d, d', d'', d''', d'''' - - - - die gemeinschaftliche Höhe MN aller Trapezien seye $= h$, und die gesuchte Höhe seye $= x$, so sind die Inhalte der Theile FGab, GHbc, HKcd - - - - $=$ $\frac{1}{2}(2ax + dx^2 : h)$, $\frac{1}{2}(2a'x + d'x^2 : h)$, $\frac{1}{2}(2ax + d''x^2 : h$ u. s. w. (§. 76.).

Man hat also folgende Gleichung aufzulösen.
$2m = p(2ax + dx^2 : h) + q\,(2a'x + d'x^2 : h) + r\,(2a''x + d''x^2 : h + s\,(2a'''x + d'''x^2 : h + t\,(2a''''x + d''''x^2 : h)$ - - - - - wobey man nur die Beschaffenheit der a, a', a'', a''' - - - - und d, d', d'', d''' - - - - nicht vergessen muß.

Es

Es seye z. B.

$FG = 70, GH = 64, HK = 125, KL = 77$
$AB = 46, BC = 92, CD = 54, DE = 103, MN = 109,$
$p = 3, q = 2, r = 4, s = 5, t = 3\frac{1}{2}$, und $m = 82575$, so ist
$a = 70, a' = 64, a'' = 125, a''' = 0, a'''' = 77$, und
$d = -24, d' = 28, d'' = -a'' = -125, d''' = 54$, und
$d'''' = 26.$, es ist demnach $3.(2.70x - 24x^2 : 109 + 2(2.64x + 28x^2 : 109) + 4(2.125x - 125x^2 : 109 + 5.54x^2 : 109, + \frac{7}{2}(2.77x + 26x^2 : 109 = 2m = 165150$, das ist nach gehöriger Reduktion, $2215x - 155x^2 : 109 = 165150$, aus welcher man endlich $x = 778,82 \pm 700,30$ entwickelt, nämlich $x = 78,52$; weil nun das untere Zeichen brauchbar ist, in dem $x < h$ seyn muß.

Und nun kann die Aufgabe (§. 74.) auch leicht in dem Falle aufgelöset werden, wo die Winkel nicht in Zahlen, sondern nur vorgezeichnet gegeben sind; man messet nemlich alle Paralellen und Höhen der sämmlichen Trapezien und Dreyecke mit dem Zirkel, bestimmet daraus ihren Inhalt nebst ihrem Werthe, ferner den Werth der verlangten Theile $mA : (m + n + o - - - -)$ $nA : m + n + o - - - -)$ $oA : m + n + o - - - -)$, und im Falle, daß zu einem Dreyecke oder Trapezium z. B. ABB' oder $B'BC''C$ noch ein Trapezium hinzukommen müsse,

um

um einen verlangten Werth z. B. mA : (m + n + ----) zu erhalten, so wird die Höhe desselben nach der so eben gegebenen Auflösung gefunden.

Fünftes Kapitel.

Von den ein= und umgeschriebenen Poligonen.

§. 79.

Erinnerung.

Was ein um = und eingeschriebenes Poligon sey, wie auch die Eigenschaften derselben und ihr Verhältniß gegen einander, weiß man aus der Elementargeometrie hinlänglich; da aber gewöhnlich nur von den um= und eingeschriebenen regelmäßigen Poligonen gehandelt wird, die unregelmäßigen aber ganz mit Stillschweigen übergangen zu werden pflegen, so wird es nicht überflüßig seyn, einige Eigenschaften der leztern, welche sie mit den erstern gemein haben, in folgenden Lehrsätzen zu entwickeln.

§. 80.

Lehrsatz.

Die Nebenwinkel eines, in einem Zirkel eingeschriebenen Poligons, haben die halbe Summe der Bögen zu ihrem Maaße, von welchen die beyden

Seiten des Poligons, die den Poligonswinkel einschließen, umspannt werden.

Beweis.

Es seyen AB und BC zwey Seiten eines in einem Zirkel eingeschriebenen Poligons (Fig. 40); man ziehe mit einer Seite z. E. BC eine Paralelle AD, so ist $EBC = EAD = \frac{1}{2}$ Bogen $(BC + CD)$, da aber Bogen $CD =$ Bogen AB ist, so ist auch $EBC = \frac{1}{2}$ Bogen $(BC + AB)$.

§. 81.

Aufgabe.

Aus zwey gegebenen neben einander liegenden Seiten AB und BC (Fig. 41.) eines in einem Zirkel eingeschriebenen Poligons, nebst dem von ihnen eingeschlossenen Winkel ABC den Radius r des Zirkels zu finden, in welchem das Poligon eingeschrieben ist.

Auflösung.

Man ziehe die Diagonal AC und die aus dem Mittelpunkte M auf dieselbe senkrechte MH, wie auch die Radien MA und MC, so ist das Maaß des Nebenwinkels $B = \frac{1}{2}$ Bogen $(AB + BC) = AMH$. Nun ist $1 : AM = \sin.\, AMH : AH$, folglich $AM = r = AH : \sin.\, AMH, = \frac{1}{2} AC : \sin.\, B = \sqrt{AB^2 + BC^2 + 2\, AB.\, BC \cos.\, B} : 2 \sin.\, B.$

§. 82.

Erklärung.

Wenn man die Winkel eines Poligons nach der Ordnung mit 1, 2, 3, 4 ---- (von was immer für einem beliebigen Winkel angefangen) bezeichnet, so werde ich der Kürze wegen den ersten, dritten, fünften, siebenten u. s. w. die ungeraden, den zweyten, vierten, sechsten, achten u. s. w. die geraden Winkel nennen.

Lehrsatz.

Die Summe der ungeraden Winkel sowohl als die der geraden eines eingeschriebenen Poligones von einer geraden Anzahl Seiten betragt 180°. So z. B. ist in (Fig. 41.), welche ein Achteck vorstellet, $A + C + E + G = B + D + F + H = 180°$.

Beweis.

Es seyen die Bögen AB, BC, CD ----- = a, b, c, ----- h,

so ist nach (§. 80.)

$$2A = h + a \quad 1$$
$$2B = a + b \quad 2$$
$$2C = b + c \quad 3$$
$$2D = c + d \quad 4$$
$$2E = d + e \quad 5$$
$$2F = e + f \quad 6$$
$$2G = f + g \quad 7$$
$$2H = g + h \quad 8$$

Man addiere alle ungerade Gleichungen, so hat man $2A + 2C + 2E + 2G = h + a + b + c + d + e + f + g = 360°$, (§. 9.) und folglich $A + B + C + D = 180°$. Und eben so erhält man $B + D + F + H = 180°$, durch die Addition aller geraden Gleichungen.

§. 83.

Zusatz.

Wenn sofort in einem eingeschriebenen Poligon von einer geraden Anzahl Seiten alle Winkel bis auf einen geraden und einen ungeraden bekannt sind, so können auch diese letztere gefunden werden, weil ein jeder derselben das Supplement zu 180° ist.

§. 84.

Zusatz.

Wenn die Nebenwinkel eines Poligons von einer geraden Anzahl Seiten, nicht in solcher Ordnung auf einander folgen, daß sowohl die Summe der geraden als die der ungeraden Nebenwinkel 180° ist, so ist dasselbe nicht **einschreibfähig**. Man kann aber nicht umgekehrt schließen; es können nemlich wohl die Summen der geraden Nebenwinkel sowohl, als die der ungeraden 180° seyn, und das Poligon doch **einschreibunfähig** seyn. Man be=

betrachte nur z. B. die Figur ABC - - - gh, (Fig. 41.) oder ABC - - - - g'h', in welchen gh, g'h' mit GH paralell, und folglich die Winkel g,g', h,h' = G, H, und doch ist weder die eine noch die andere dieser Figur einschreibfähig; denn daß der Zirkel ABC - - - GH nicht auch zugleich durch g und h, oder g' und h' laufen könne, ist augenscheinlich; daß aber auch kein anderer Zirkel etwa von einem kleinern oder größern Radius um diese Figuren beschrieben werden könne, ist eben so leicht einzusehen, denn, weil drey nicht in gerader Linie liegende Punkte, die Lage und Grösse eines durch sie gezogenen Zirkels bestimmen, so ist es unmöglich, daß z. B. die drey Punkte A, B, und C in der Peripherie ABCD und zugleich in der Peripherie eines kleinern oder grössern Zirkels liegen, wie doch geschehen müßte, wenn die Figur ABC - - - h oder ABC - - - h' ebenfalls in einen Zirkel beschrieben werden könnte.

§. 85.

Lehrsatz.

Wenn ein Poligon mit einer ungeraden Anzahl Seiten in einem Zirkel eingeschrieben ist, so ist jeder eine Seite umspannende Bogen das Maaß der Summe der an dieser Seite liegenden Nebenwinkel + der Summe aller geraden — der Summe aller

ungera-

ungeraden Nebenwinkel gleich. So z. B. ist Bogen AB (Fig. 42.) $= A + B - C + D - E + F - G$, Bogen BC $= B + C - D + E - F + G - A$. Bogen CD $= C + D - E + F - G + A - B$, u. s. w.

Beweis.

Nach (§. 83.) ist
$$2A = GA + AB \quad 1$$
$$2B = AB + BC \quad 2$$
$$2C = BC + CD \quad 3$$
$$2D = CD + DE \quad 4$$
$$2E = DE + EF \quad 5$$
$$2F = EF + FG \quad 6$$
$$2G = FG + GA \quad 7$$

Man addiere die ungeraden Gleichungen, d. i. die erste, dritte, fünfte und siebente, so hat man $2A + 2C + 2E + 2G = GA + AB + BC + CD + DE + EF + FG + GA = 360° + GA = A + B + C + D + E + F + G + GA$, oder nach gehöriger Reduktion $AG = G + A - B + C - D + E - F$.

Man ziehe diese Gleichung von der siebenten ab, so hat man $FG = F + G - A + B - C + D - E$.

Ziehet man diese von der sechsten ab, so bekommt man $EF = E + F - G + A - B + C - D$ und diese wieder von der fünften abgezogen, giebt $DE = D + E - F + G - A + B - C$, u. s. w.

§. 87.

§. 86.

Lehrsatz.

Jede zwey Seiten eines in einem Zirkel eingeschriebenen Poligons mit einer ungeraden Anzahl Seiten, verhalten sich gegen einander, wie die Sinusse der Summe aller ungeraden Nebenwinkel, welche nicht an diesen Seiten anliegen. So z. E. ist (Fig. 42.) AB : BC = sin. (C + E + G) : sin. (D + F + A), AB : CD = sin. (C + E + G) : sin. (E + G + B) BC : EF = sin. (D + F + A) : sin. (G + B + D) u. s. w.

Beweis.

Man ziehe die Radien MA, MB, MC, MD - - - wie auch die aus M auf den Seiten des Poligons senkrechten MP, MQ, MR - - - -, so ist in dem rechtwinklichten Dreyecke MPA, sin. $\frac{1}{2}$ AMB : AP = 1 : MA folglich MA = AP : sin. $\frac{1}{2}$ AMB, = $\frac{1}{2}$ AP: sin. $\frac{1}{2}$ Bogen AB. Nun ist aber Bogen AB = A + B — C + D — E + F — G (§. 86.) = 360° — 2C — 2E — 2G (§. 9.), daher ist sin. $\frac{1}{2}$ Bogen AB = sin. (180° — C — E — G) = sin. (C + E + G) (§. 21.), folglich MA = AB : 2 sin. (C + E + G). Auf gleiche Weise erhält man aus dem Dreyecke BMQ, MB = MA = BC : 2 sin. (D + F + A). Aus dem Dreyecke MRC erhält man eben so, MC = MA = CD :

= CD : 2 sin. (E + G + B) und einen ähnlichen Ausdruck erhält man aus allen übrigen Dreyecken; folglich ist auch $\frac{1}{2}$ AB : $\frac{1}{2}$ BC = 2 sin. (C+E+G) : 2 sin. (D + F + A), oder auch AB : BC = sin. (C + E + G) : sin. (D + F + A), AB : CD = sin. (C + E + G) : sin. (E + G + A) u. s. w.

§. 88.

Zusatz.

Wenn also alle Winkel eines eingeschriebenen Poligones mit einer ungeraden Anzahl Seiten, nebst noch einer einzigen Seite bekannt sind, so können alle übrige Seiten vermittelst obiger Proportion gefunden werden.

§. 89.

Zusatz.

Wenn obige Proportion zwischen den Seiten und den Winkeln eines ungeradseitigen Poligons nicht statt hat, so ist dasselbe nicht **einschreibfähig.**

§. 90.

Lehrsatz.

In einem jeden eingeschriebenen Poligon, es mag dasselbe eine gerade oder ungerade Anzahl Seiten haben, verhalten sich die Sinusse der was immer für zwey neben einander liegenden Winkel,

wie die Summe der an diesen Winkeln liegenden Seiten, und des Produkts aus den Cosinussen der genannten Winkel in die zwischen beyden Winkeln liegenden Seiten. Das ist z. B. sin. B : sin. C = BA + BC. cosin. B : CD + BC cos. C, sin. C : sin. D = CB + CD. cos. C : DE + CD. cos. D, u.s.w.

Beweis.

Man ziehe die Diagonalen AC und BD, so ist in dem Dreyecke ABC, Tang. BAC = BC sin. B : (AB + BC. cos. B.), und in dem Dreyecke BCD ist Tang. CDB = BC. sin. C : (DC + BC cos. C) (§. 37.); es ist aber BAC = CDB (beyde haben den halben Bogen BC zum Maaße) daher ist auch BC sin. B : (AB + BC cos. B) = BC sin. C : DC + BC cos. C, woraus endlich sin. B : sin. C = BC cos. B + AB : BC cos. C + DC folget. Eben so kann man durch Hilfe zweyer anderer Diagonalen die man vor zwey neben einander liegenden Winkeln vorbeyziehet, z. B. BD und CE erweisen, daß sin. C : sin. D = CD cos. C + CB : CD cos. D + DE, u. s. w.

§. 91.

Zusatz.

Man setze in diesen Proportionen AB = BC = CD = DE - - - - so hat man sin. B : sin. C =

cos.

cos. B + 1 : cos. C + 1, sin. C : sin. D = cos. C+1 : cos. D + 1. Nun kann aber diese Proportion nur in dem Falle statt haben, wenn B = C = D u. s. w. ist, weil für sin. B $\gtrless$ sin. C cos. B $\lessgtr$ cos. C ist. Soll daher ein gleichseitiges Poligon in einem Zirkel eingeschrieben werden können, so muß dasselbe auch gleichwinklicht seyn.

§. 92.

Zusatz.

Man setze in der obigen Proportion B=C=D=E ---- so hat man sin. B : sin. B = BC. cos. B + AB : BC. cos, B+CD, woraus folget AB=CD; und eben so erhält man aus der Proportion sin. C: sin. D = CD cos. C + CB : CD. cos. D + DE, daß CB = DE, und aus der Proportion sin. D : sin. E = DE. cos. D + DC : DE cos. E + EF, daß DC= EF sey u. s. w. Folglich kann ein gleichwinklichtes Poligon nur in dem Falle in einem Zirkel eingeschrieben werden, wenn sowohl alle geraden Seiten als auch alle ungeraden unter sich gleich sind, als: AB = CD = EF = GH = KL, und auch BC = DE = FG = HK = LM - - - - -.

§. 93.

Zusatz.

Aus der obigen Proportion z. B. sin. B : sin. C = BC. cos. B + AB : BC. cos. C + CD, folgt die Gleichung BC, sin. B. cos. C + CD sin. B = BC. sin. C. cos. B + AB sin. C, oder auch BC sin. B. cos. C — BC. sin. C. cos. B = AB. sin. C — CD. sin. B; ferner ist; weil sin. B. cos. C — sin. C. cos. B = sin. (B—C) ist (§. 21.) auch BC. sin. (B—C) = AB sin. C — CD sin. B, und da nun in dieser Gleichung jede der drey Seiten AB, BC und CD abgesöndert werden kann, so kann man aus den zwey bekannten Winkeln B und C, und den zwey daran liegenden Seiten eines eingeschriebenen Poligones, die dritte unbekannte Seite finden; auch ist man von der Uufähigkeit desselben in einem Zirkel eingeschrieben zu werden versichert, wenn obige Proportion nicht zwischen allen Seiten und Winkeln des Poligons statt hat.

§. 94.

Lehrsatz.

Wenn man aus dem Mittelpunkte des Zirkels, in welchem ein Poligon eingeschrieben ist, (Fig. 41 u. 42.) die Radien MA, MB, MC . . . . . ziehet, so

so verhalten sich die Flächenräume der hiedurch entstehenden Dreyecke AMB, BMC, CMD - - - - - - wie die Sinusse ihrer Winkel am Mittelpunkte des Zirkels, das ist, △ AMB : △ BMC = sin. AMB : sin. BMC.

Beweis.

Es ist 2MAB = MA. MB sin. AMB (§. 56.) = r.^{2} sin. AMB, und eben so ist auch 2MBC = r.^{2} sin BMC, wenn man nemlich MA, MB, MC - - - = r setzet; daher ist auch 2MAB : 2MBC = r^2. sin. MAB : r^2. sin. BMC. oder MAB : MBC = sin. AMB : sin. BMC.

§. 95.

Zusatz.

Der Flächenraum des ganzen Poligons ist $\frac{r^2}{2}$ (sin. AMB + sin. BMC + sin. CMD - - - - - -). Hat das Poligon eine ungerade Anzahl Seiten, so können diese Winkel am Mittelpunkte nach (§. 86.) durch eine blosse Addition und Subtraktion der Nebenwinkel leicht gefunden werden; ist aber die Anzahl der Seiten gerade so kann man dieselben nur durch trigonometrische Funktionen finden; es ist nemlich (Fig. 41.) Tang. $\frac{1}{2}$ Bogen AB = Tang. ACB = AB. sin. B : (BC

(BC + AB cos. B). Tang. $\frac{1}{2}$ BMC = Tang. BDC = BC sin. C : (CD + BC cos. C) (§. 37.)

§. 96.

Zusatz.

Wenn man die Ordnung der Seiten eines eingeschriebenen Poligons abändert, d. i. die Seiten verwechselt, so bleibt der Flächenraum nichts desto weniger eben derselbe; denn durch die Verwechslung der Seiten wird nur die Ordnung der Winkel am Mittelpunkte; nicht aber ihre wirkliche Grösse geändert, und es bleibt folglich auch der obige Ausdruck für den Flächenraum $\frac{r^2}{2}$ (sin. AMB + sin. BMC + sin. CMD - - - -) immer derselbe. So z. E. sind die drey in gleichen Zirkeln eingeschriebenen Poligone, deren Seiten in der verschiedenen Ordnung a, b, c, d, e, f. a, d, e, b, f, c und a, e, c, b, d, f. (Fig. 43. 44. 45.) auf einander folgen, am Flächenraum einander gleich, unerachtet ihre Poligonswinkel verschieden sind.

§. 97.

Anmerkung.

Um die Anzahl aller möglichen Verwechslungen der Seiten zu finden, die mit einem eingeschrie-

benen

benen Poligon von n Seiten in Ansehung derselben vorgenommen werden können, dienet folgende Betrachtung. Die Anzahl aller möglichen Versetzungen überhaupt von n Gegenständen, ist bekanntlich = 1, 2, 3, 4 - - - - (n — 2) (n — 1). n. In dieser Anzahl sind aber alle mögliche Versetzungen, also auch diejenigen enthalten, welche von den andern nur in Rücksicht des Anfanges, wo nemlich zu zählen angefangen wird, verschieden sind; welches aber bey Poligonen in keine Betrachtung kommen darf. So z. B. sind die fünf Poligone deren Seiten in der Ordnung a. b. c. d. e, b. c. d. e. a, c. d. e. a. b, d. e. a. b. c, und e. a. b. c. d auf einander folgen, nur für ein einziges zu rechnen; weil sie nur in Hinsicht ihrer Lage gegen den Rand des Papiers, worauf sie gezeichnet sind, verschieden sind; im Grunde aber sich alle einander decken, wenn sie gehörig auf einander gelegt werden.

Da nun eben dieses von allen andern Ordnungen der Seiten gesagt werden kann, z. B. von der Ordnung a. c. b. e. d und ihren Versetzungen c. b. e. d. a, b. e. d. a. c, e. d. a. c. b, und d. a. c. b. e, von der Ordnung a. c. d. b. e und ihren Versetzungen c. d. b. e. a, d. b. e. a. c, b. e. a. c. d und e. a. c. d. b. u. s. w., so muß das obige Produkt

1. 2. 3. 4. 5 - - - - - - n, mit n dividiert werden, wenn man die Anzahl aller verschiedenen Poligonen haben will, welche durch die Versetzung der Seiten entstehen.

Ferner wird bey den Versetzungen überhaupt auch auf die Lage der Gegenstände in Rücksicht des Rechts und Links gesehen; so z. B. werden die Ordnungen a. b. c. d. e und e. d. c. b. a für zwey verschiedene gezählet; bey den Poligonen aber können beyde nur für eines und dasselbe angesehen werden, weil beyde einander decken, wenn das eine umgekehrt auf das andere gelegt wird. Man muß folglich um die Anzahl aller wahrhaft verschiedenen oder unähnlichen Poligone zu finden, das obige Produkt auch noch mit 2 dividieren, und die Anzahl aller unter sich zwar unähnlichen, aber am Flächenraume einander gleichen Poligone, welche durch die Verwechslung der Seiten entstehen können, ist daher $= 1.\ 2.\ 3.\ 4 - - - - - - (n - 1)\, n : 2n = \frac{2.\ 3.\ 4.\ 5. - - - - - - (n - 1)}{2}$. So z. B. können aus drey gegebenen Seiten nur 2 : 2 = 1 Dreyeck, aus 4 gegebenen Seiten 2. 3 : 2 = 3 Vierecke, aus 5 gegebenen Seiten 12 Fünfecke, aus 6 gegebenen Seiten 60 Sechsecke u. s. w. gebildet werden.

§. 98.

§. 98.

Aufgabe.

Den Radius FM des Zirkels zu finden, um welchen ein gegebenes Poligon geschrieben ist.

Auflösung.

Die Dreyecke (Fig. 46.) AFM und ALM sind einander ähnlich und gleich; denn es ist $F = L = 90°$, $FM = LM$, und $AM = AM$, daher ist auch der Winkel $AMF = AML = \frac{1}{2} LMF$. Ferner ist in dem Viereck AFML, $FAL + A = 180°$, und auch $FAL + FML = 180°$, daher ist auch $FML = A$, und $FMA = \frac{1}{2} A$. Nun ist in dem Dreyecke AFM, $MF : FA = 1 : \text{Tang. } AMF$, und folglich $FA = MF. \text{Tang. } \frac{1}{2} A$; Eben so kann auch erwiesen werden, daß $BF = MG. \text{Tang. } \frac{1}{2} B$, und daher $AF + BF = MF. \text{Tang. } \frac{1}{2} A + MG. \text{Tang. } \frac{1}{2} B$, das ist, $AB = r (\text{Tang. } \frac{1}{2} A + \text{Tang. } \frac{1}{2} B)$, wenn man nämlich $MF = MG = MH --- = r$ setzet, und endlich $r = AB : (\text{Tang. } \frac{1}{2} A + \text{Tang. } \frac{1}{2} B)$.

Auf eben diese Weise findet man auch $r = BC : (\text{Tang. } \frac{1}{2} B + \text{Tang. } \frac{1}{2} C). = CD : (\text{Tang. } \frac{1}{2} C + \text{Tang. } \frac{1}{2} D)$ u. s. w.

§. 99.

Zusatz.

Es ist daher in einem jeden umgeschriebenen Poligone AB : BC = Tang. $\frac{1}{2}$ A + Tang. $\frac{1}{2}$ B : Tang. $\frac{1}{2}$ B + Tang. $\frac{1}{2}$ C, AB : CD = Tang. $\frac{1}{2}$ A + Tang. $\frac{1}{2}$ B : Tang. $\frac{1}{2}$ C + Tang. $\frac{1}{2}$ D u. s. w. Hat demnach diese Proportion zwischen den Seiten und Winkeln eines Poligons nicht Statt, so ist dasselbe nicht umschreibfähig.

§. 100.

Zusatz.

Wenn in einem umgeschriebenen Poligone alle Seiten nebst zwey nebeneinander liegende, oder wenigstens nur durch einen einzigen Winkel getrennte zwey Winkel, oder alle Winkel nebst einer einzigen Seite bekannt sind, so kann das übrige durch obige Proportion gefunden werden. Sind z. B. nur die einzigen zwey Winkel A und C nebst allen Seiten der Figur bekannt, so setze man AB : BC = Tang. $\frac{1}{2}$ A + Tang. $\frac{1}{2}$ B : Tang. $\frac{1}{2}$ B + Tang. $\frac{1}{2}$ C, so wird daraus AB. Tang. $\frac{1}{2}$ B + AB. Tang. $\frac{1}{2}$ C = BC Tang. $\frac{1}{2}$ A + BC, Tang. $\frac{1}{2}$ B, oder AB Tang. $\frac{1}{2}$ B — CB. Tang. $\frac{1}{2}$ B = BC. Tang. $\frac{1}{2}$ A — AB Tang. $\frac{1}{2}$ C, und endlich Tang. $\frac{1}{2}$ B = (BC Tang. $\frac{1}{2}$ A — AB Tang. $\frac{1}{2}$ C) : (AB — BC).

§. 101.

Zusatz.

Man setze in diesen Proportionen A = B = C = D - - - - so ist AB : BC = Tang. $\frac{1}{2}$ A + Tang. $\frac{1}{2}$ A : Tang. $\frac{1}{2}$ A + Tang. $\frac{1}{2}$ A, also AB = BC. Ein gleichwinklichtes Poligon kann sohin nur in dem einzigen Falle umschreibfähig seyn, wenn auch seine Seiten gleich sind. Man setze hingegen AB = BC = CD - - - - - - so erhält man AB : AB = Tang. $\frac{1}{2}$ A + Tang. $\frac{1}{2}$ B : Tang. $\frac{1}{2}$ B + Tang. $\frac{1}{2}$ C, und folglich Tang. $\frac{1}{2}$ A = Tang. $\frac{1}{2}$ C, also A = C. Auf eben diese Weise erhält man auch aus der Proportion BC : CD = Tang. $\frac{1}{2}$ B + Tang. $\frac{1}{2}$ C : Tang. $\frac{1}{2}$ C + Tang. $\frac{2}{2}$ D, daß B = D, aus der Proportion CD : DE = Tang. $\frac{1}{2}$ C + Tang. $\frac{1}{2}$ D : Tang. $\frac{1}{2}$ D + Tang. $\frac{1}{2}$ E, daß C = E u. s. w. Ein gleichseitiges Poligon kann folglich nur alsdann umschreibfähig seyn, wenn sowohl die geraden als die ungeraden Winkel, jede unter sich einander gleich sind.

§. 102.

Lehrsatz.

Der Flächenraum m eines umgeschriebenen Poligons, ist = r^2. (Tang. $\frac{1}{2}$ A + Tang. $\frac{1}{2}$ B + Tang. $\frac{1}{2}$ C - - - - - -).

Be-

Beweis.

Die Dreyecke AMB, BMC, CMD u. s. w. aus denen das Poligon bestehet, haben alle den Radius des Zirkels zur Höhe, folglich ist $m = \frac{r}{2}$ (AB + BC + CD ------), setzet man nun für AB, BC, CD ---- ihre in (§. 98.) gefundenen Werthe, so hat man $m = \frac{r^2}{2}$ (Tang. $\frac{1}{2}$ A + Tang. $\frac{1}{2}$ B + Tang. $\frac{1}{2}$ B + Tang. $\frac{1}{2}$ C + Tang. $\frac{1}{2}$ C + Tang. $\frac{1}{2}$ D u. s. w.) $= \frac{r^2}{2}$ (2 Tang. $\frac{1}{2}$ A + 2 Tang. $\frac{1}{2}$ B + 2 Tang. $\frac{1}{2}$ C + 2 Tang. $\frac{1}{2}$ D ----) $= r^2$ (Tang. $\frac{1}{2}$ A + Tang. $\frac{1}{2}$ B + Tang. $\frac{1}{2}$ C ----).

§. 103.

Zusatz.

Da das Produkt $\frac{r}{2}$ (AB + BC + CD ----) immer eben dasselbe bleibt, in welcher Ordnung auch die Seiten aufeinander folgen mögen, so gilt auch von den umgeschriebenen Poligonen, was oben in den §§ 96 und 97 von den eingeschriebenen gesagt worden ist.

Sechs:

Sechstes Kapitel.

Von dem Winkelgleichungspunkte.

§. 104.

Erklärung.

Einen Punkt M eines Poligons, der eine solche Lage hat, daß alle Winkel, welche durch die Linien MA, MB, MC, MD - - - - (Fig. 47.) die nach den Ecken der Figur gezogen werden, um ihn herum entstehen einander gleich sind, könnte man den Winkelgleichungspunkt nennen; ich werde ihn in in Hinsicht, weil einem Auge, welches in demselben stehet, alle Seiten des Poligons gleich groß zu seyn scheinen, glattweg den **Gleichheitspunkt** nennen.

§. 105.

Anmerkung.

Daß ein solcher Punkt auch in einem unregelmäßigen Poligone, wenn dasselbe auch eingehende Winkel hat, möglich ist, dieses bedarf meines Erachtens keines Beweises (man sehe die 47. Figur); ob er aber in allen Poligonen ohne Ausnahme, oder in welchen er nur zu finden ist, und wie dessen

sen Lage durch Rechnung gefunden werden könne, dieses soll in diesem Kapitel abgehandelt werden.

§. 106.

Es sey M (Fig. 51.) ein solcher **Gleichheitspunkt**. Man denke sich über zwey nebeneinander liegende Dreyecke z. B. AMB und BMC zwey Zirkel beschrieben, und ziehe die Radien KA, KB, KM, wie auch HB, HC und HM, und endlich noch die Mittelpunkte K und H vermittelst einer geraden Linie HK zusammen, so ist, weil HM = HB, und KB = KM ist, HK auf BM senkrecht, und folglich der Winkel BHK = $\frac{1}{2}$ BHM = dem Peripheriewinkel BCM. Ferner ist sowohl BKA als BHC = 2AMB = 2BMC = 2α, (wenn man der Kürze wegen AMB = 360° : n = α setzet), und da die Dreyecke AKB und BHC gleichschenklicht sind, so ist KBA = HBC = $\frac{180^\circ - 2\alpha}{2}$, und so ferners KBH = ABC — KBA — HBC = 180° — B — $\left(\frac{180 - 2\alpha}{2}\right) - \left(\frac{180^\circ - 2\alpha}{2}\right) = 2\alpha - B$, und sein Nebenwinkel = 180° — (2α — B).

Man denke sich aus K und H die auf AB und BC senkrechten Kk und Hh, so hat man 1 : BK = sin. α : $\frac{1}{2}$ AB, und 1 : BH = sin. α : $\frac{1}{2}$ BC, deßwegen

wegen ist BK = AB : 2 sin. α, und BH = BC : 2 sin. α.

In dem Dreyecke KBH hat man Tang. BHK = BK sin. B′ : (BH + BK cos. B′) (§. 37.), wenn man den Nebenwinkel des Winkels KBH = B′ setzet; werden aber anstatt KB, BH und B′ ihre vorhin gefundene Werthe gesetzt, so hat man Tang. BHK = AB. sin. (2α — B) : (BC — AB. cos. (2α — B) (§. 21) = Tang. BCM.

Es sey ferner BCM = ϕ, so ist CBM = 180° — ϕ — α, MCD = BCD — BCM = 180° — C — ϕ, MDC = 180° — MCD — α = 180° — 180° + C + ϕ — α = C + ϕ — α, da nun in dem Dreyecke BMC sin. M : BC = sin. MBC : CM ist, so ist CM = BC. sin. (180° — (α + ϕ)) : sin. α = BC sin. (α + ϕ) : sin. α (§. 21.).

In dem Dreyecke MCD ist sin. M : CD = sin. MDC : CM, daher CM = CD sin. MDC : sin. M = CD. sin. (C + ϕ — α) : sin. α, und folglich ist auch BC sin. (α + ϕ) = CD sin. (C + ϕ — α; das ist: BC sin. α. cos. ϕ + BC sin. ϕ cos. α = CD sin. (C — α). cos. ϕ + CD sin. ϕ cos. (C — α), oder auch sin. ϕ (BC cos. α — CD. cos. (C — α)) =

cos.

cos. Φ (CD sin. (C — α) — BC sin. α), und endlich Tang. Φ = (CD sin. (C — α) — BC sin. α): (BC cos. α — CD cos. (C — α)). weil sin. Φ : cos. Φ = Tang. Φ ist (§. 21.).

Vorhin ist Tang. BCM = Tang. Φ = AB sin. (2α — B) : (BC — AB cos. (2α — B)) gefunden worden, es ist also auch AB sin. (α — B) : (BC — AB cos. (2α — B)) = (CD sin. (C — α) — BC sin. α) : (BC cos α — CD cos. (C — α); schaffet man aus dieser Gleichung die Brüche hinweg, so erhält man folgende Gleichung.

$$\left\{\begin{array}{l} AB.\ BC\ \sin.\ (2\alpha - B).\ \cos.\ \alpha \\ -\ AB.\ CD\ \sin.\ (2\alpha - B).\ \cos.\ (C-\alpha) \end{array}\right\} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} BC.\ CD\ \sin.\ (C-\alpha) - \overline{BC}^2\ \sin.\ \alpha\ - \\ AB.\ CD.\ \sin.\ (C-\alpha).\ \cos.\ (2\alpha - B) + \\ AB.\ BC\ \sin.\ \alpha\ \cos.\ (2\alpha - B), \end{array}\right\}$$

oder AB. BC (sin. (2α — B). cos. α — sin. α. cos. (2α — B)) + $\overline{BC}^2$ sin. α = AB. CD (sin. (2α — B). cos. (C — α) — sin. (C — α). cos. (2α — B)) + BC. CD. sin. (C — α), das ist, AB. BC. sin. (α — B) + $\overline{BC}^2$ sin. α = AB. CD sin. (3α — B — C) + BC. CD. sin. (C — α). (§. 21.), und endlich

lich ist $(AB.\ BC\ \sin.\ (\alpha - B) + \overline{BC}^2\ \sin.\ \alpha) : (AB.\ \sin.\ (3\alpha - B - C) + BC.\ \sin.\ (C - \alpha)) = CD.$

Nach einer dieser ähnlichen Verfahrungsweise, erhält man auch $(BC.\ CD\ \sin.\ (\alpha - C) + \overline{CD}^2\ \sin.\ \alpha) : AB\ \sin.\ (3\alpha - B - C) + BC\ \sin.\ (C - \alpha)) = DE$, und $(CD.\ DE\ \sin.\ (\alpha - D)\ \overline{DE}^2\ \sin.\ \alpha) : CD\ \sin.\ (3\alpha - D - E) + DE\ \sin.\ (E - \alpha)) = EF$ u. s. w. Wenn demnach CD, DE, EF u. s. w. die so eben genannte Größe nicht haben, so ist in dem so beschaffenen Poligone kein Gleichheitspunkt möglich.

§. 107.

Wenn ein Gleichheitspunkt in einem Poligon möglich ist, so ist seine Lage leicht zu finden; denn es ist $\text{Tang.}\ BCM = \text{Tang.}\ BHK = AB\ \sin.\ (2\alpha - B) : (BC - AB.\ \cos.\ (2\alpha - B))$, mithin kann man in dem Dreyecke BCM aus der bekannten Seite BC und den beyden Winkeln M und BCM die Seiten BM und CM finden.

Die geometrische Construktion ist aus der Figur anschaulich genug. Man beschreibet nämlich über zwey beliebige Seiten des Poligons z. B. AB und BC zwey Zirkelabschnitte BHMA und CGMB,

welche einen Winkel $= AMB = \frac{360^\circ}{n}$ zu fassen fähig sind (dieses zu bewerkstelligen ist aus der Elementargeometrie bekannt) und nun ist der Durchschnittspunkt M der beyden Zirkel der verlangte Punkt; voraus gesetzt, daß ein solcher möglich ist; widrigenfalls werden sich nicht alle Zirkel, die man nach eben diese Weise auf einer jeden Seite des Poligons beschreiben würde, in einem und demselben Punkte schneiden.

§. 108.

Zusatz.

Ist ABCD (Fig. 48.) ein Viereck, so ist $\alpha = 90^\circ$ und also AC auf BD senkrecht, und $CD = (AB. BC. \cos. B + \overline{BC}^2) : (- AB \cos. (B + C) - BC. \cos. C.$ Man setze (Fig. 49.) $B = C = 90^\circ$, so ist $\cos. B = \cos. C = 0$, und $\cos. (B + C) = - 1$, (§. 21.) folglich $CD = \overline{BC}^2 : AB$, das ist, $AB : BC = BC : CD$; wenn sonach drey nacheinander folgende Seiten eines Trapeziums in einer stetigen Proportion stehen, und zugleich zwey rechte Winkel einschließen, so stehen die beyden Diagonalen senkrecht aufeinander.

Ist $B < 90^\circ$, $C < 90^\circ$, und entweder $B+C$ ebenfalls $< 90^\circ$, oder $B + C > 90^\circ$, aber BC

cos.

cos. C > AB. cos. (B + C), so ist der Zähler des Bruches, welcher die Größe CD bestimmt, positiv; der Nenner aber negativ, folglich ist CD negativ, das heißt CD hat eine solche Lage, die der Lage AB und BC entgegengesetzt ist. Sieh die 50te Figur.

§. 109.

Zusatz.

Will man das Verhältniß der Seiten eines Dreyeckes ABC (Fig. 52.) untersuchen, welches eines solchen Gleichheitspunktes fähig ist, so setze man in der allgemeinen Formel (§. 106.) AC anstatt CD, und 120° anstatt α, so hat man AC = BC (AB sin. (120 — B) + BC sin. 120°) : (AB sin. A + BC sin. (C — 120°)); weil 360° — B — C = A ist (§. 9.) Nun ist aber in einem jeden Dreyecke ABC, BC = AB sin. A : sin. C (§. 28.). Wird dieser Werth für BC substituiret, und gehörig reduzieret, so erhält man AC = $\frac{AB}{\text{sin. C}}$ (sin. C sin. (120 — B) + sin. A. sin. 120°) : (sin. C + sin. (C — 120°), oder auch, weil sin. A = sin. (360° — B — C (§. 9.) = — sin. (B + C) (§. 21.) ist, AC = $\frac{\text{AB.}}{\text{sin. C}}$ (sin. C. sin. (120° — B) — sin. 120°. sin. (B + C) : sin. C + sin. (C — 120°); es ist aber sin. (120° — B) = sin. 120°. cos. B — sin. B cos. 120°, sin. (B +

$(B+C) = \sin. B \cos. C + \sin. C \cos. B$, $\sin. (C - 120^\circ) = \sin. C. \cos. 120^\circ - \sin. 120^\circ \cos. C.$ (§. 21.). und $\cos. 120^\circ = \cos. (180^\circ - 60^\circ) = -\cos. 60^\circ = -\frac{1}{2}$; werden diese Werthe substituiret, so erhält man nach gehöriger Reduktion,

$$AC = \frac{AB. \sin. B}{\sin. C} (\tfrac{1}{2} \sin. C - \sin. 120^\circ. \cos. C) : (\tfrac{1}{2} \sin. C - \sin. (120^\circ \cos. C),$$

das ist $AC = AB. \sin. B : \sin. C.$ Da nun in allen Dreyecken ABC ohne Ausnahme $AC = AB \sin. B : \sin. C.$ ist (§. 28.), so müssen alle Dreyecke einen Gleichheitspunkt haben, welches auch deutlich aus der geometrischen Construction erhellet, weil, wenn man auf was immer für zwey Seiten eines Dreyeckes, Zirkel, deren Abschnitte Winkel von 120° Graden zu fassen fähig sind, beschreibet, und von dem Durchschnittspunkte beyder Zirkel nach den Spitzen des Dreyeckes Linien ziehet, ein jeder der drey um den Durchschnittspunkt herumliegenden Winkel 120° Grade halten muß, weil $360^\circ - 2. 120^\circ = 120$ ist.

§. 110.

Lehrsatz.

Wenn man über alle Seiten eines Poligons, welcher einen Gleichheitspunkt hat, Zirkel beschreibet, die sich in dem Gleichheitspunkte durchschneiden, und die Mittelpunkte dieser Zirkel zusammenziehet, so ist das dadurch entstehende Poligon KHGFL (Fig. 51.) gleichwinklicht.

Beweis.

In dem Vierecke KlMm ist sowohl l als m ein rechter Winkel (§. 107.), folglich ist $lMm + lKm = 180^\circ$, da nun $lMm = \alpha$ ist, so ist $lKm = 108^\circ - \alpha$, eben so ist auch in dem Vierecke mMnH, nMgG, gMpF u. s. w. $n = g = p - - - - = 90^\circ$, und $mMn = nMg = gMp = pMl = \alpha$, folglich auch $mHn = nGg = gFp = pLl = 180^\circ - \alpha$. w. z. e.

Siebentes Kapitel.

Von den runden Körpern.

§. 111.

Erklärung.

Unter runden Körpern versteht man nicht nur jene, welche in der Elementargeometrie abgehandelt werden, als: die Kugel, den Kegel und den Zylinder, sondern überhaupt alle diejenigen, deren Entstehung durch eine zirkelförmige Bewegung einer geraden Ebene, welche sich um eine gerade Linie als eine unbewegliche Achse beweget, vorgestellt werden kann. Diese Linie kann entweder in einem Gränzpunkte der Ebene selbst, oder in ihrer Verlängerung liegen. Man kann diese Ebene die Erzeugungs-Ebene nennen.

Uebri-

Uebrigens soll hier nur von denjenigen runden Körpern gehandelt werden, deren Erzeugungs-Ebenen geradlinichte Figuren sind.

§. 112.

Lehnsätze.

Der Schwerpunkt (ein Punkt, welcher nur ganz allein unterstützet werden darf, um die ganze Linie, Ebene oder den Körper im Gleichgewichte zu erhalten;) einer geraden Linie ist in ihrer Mitte.

Der Schwerpunkt E eines Dreyeckes ABC (Fig. 52.) wird gefunden, wenn man aus einem beliebigen Winkel A auf die Mitte D der Grundlinie BC eine Linie AD ziehet, und $\frac{2}{3}$ AD von A nach E trägt.

§. 113.

Anmerkung.

Der Jesuit P. Guldin hat die Schwerpunkte der Linien und Ebenen auf die Berechnung der Oberflächen und körperlichen Inhalte der runden Körper angewendet. Nach der von ihm erwiesenen Regel ist die Oberfläche eines runden Körpers, der z. B. durch die Bewegung der Erzeugungs-Ebene ABCDEA um die Achse Tv oder RS (Fig. 53.) ent-

entstanden ist, dem Produkte gleich, welches entstehet, wenn man den Umfang ABCDE durch die Peripherie eines Zirkels multiplizieret, der den Abstand des Schwerpunktes F dieser Linie ABCDE von der unbeweglichen Achse Tv oder RS zum Radius hat.

Und eben so wird der Inhalt dieses runden Körpers gefunden, wenn man die Ebene ABCDEA durch die Peripherie eines Zirkels multiplicieret, der den Abstand GK des Schwerpunktes G der Ebene von der Achse Tv oder RS zum Radius hat, je nachdem die Ebene sich um Tv oder RS beweget hat.

Wie man aber die Lage des Schwerpunktes einer Ebene oder ihres Umfanges findet, dieses wird in allen Lehrbüchern der Mechanik gelehret.

§. 114.

Anmerkung.

Wenn die erzeugende Ebene eine geradlinichte Figur ist (Fig. 54.), so ist es für die Ausübung bequemer bey Berechnung der Oberflächen und Inhalte der dadurch erzeugten Körper, sich der Guldinischen Regel nur theilweise zu bedienen. Nemlich, um die Oberfläche zu bekommen, multiplicieret man

alle

alle erzeugende Linien AB, BC, CD, DE - - - - durch die Peripherie eines Zirkels, welcher die Entfernung ihrer Schwerpunkte ww, Gg, Hh u. s. w. zum Halbmesser hat; und eben so, um den körperlichen Inhalt zu erhalten, multiplizieret man jedes Dreyeck ABC, ACDAEF - - - - - - durch eie Pheripherie eines Zirkels, welcher den Abstand ihrer Schwerpunkte Mm, Nn, Oo, Pp - - - - - - - zum Halbmesser hat. Wie man die Entfernungen aller dieser Schwerpunkte von der Achse RS und die Inhalte aller Dreyecke ABC, ACD - - - - - -, allgemein, und ohne daß eine andere Grösse als die Seiten und Winkel der erzeugenden Ebene in die Rechnung komme, ausdrucken kann, dieses soll im folgenden gezeigt werden.

§. 115.

Es sey die Entfernung der Achse RS von der nächsten Spitze der erzeugenden Ebne nemlich Aa = a, und der Winkel TAB, den die Paralelle Tv mit AB einschliesset = α, so hat man für die Entfernungen der Schwerpunkte der Linien AB, BC, CD - - - - von der Achse RS folgende Werthe:

$Ww' = a + \frac{1}{2}$ AB sin. α (§. 26.)

$Gg' = a +$ AB sin. $\alpha + \frac{1}{2}$ BC. sin. $(\alpha + B.)$

$Hh' = a +$ AB sin. $\alpha +$ BC. sin. $(\alpha + B)$ $+ \frac{1}{2}$ CD sin. $(\alpha + B + C)$.

Kk'

$Kk' = a + AB \sin. \alpha + BC. \sin. (\alpha + B) + CD \sin. (\alpha - - - C) + \frac{1}{2} DE \sin. (\alpha - - - D).$

$Ll' = a + AB \sin. \alpha + BC \sin. (\alpha + B) - - - \frac{1}{2} EF \sin. (\alpha - - - - E)$ und so weiter, wovon der weitere Fortgang leicht zu übersehen ist.

Setzet man das Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie $= 1 : \pi$, so hat man für die Oberfläche S des erzeugten Körpers folgenden Werth, als:

$S = 2\pi AB (a + \frac{1}{2} AB \sin. \alpha) + 2\pi BC (a + AB \sin. \alpha + \frac{1}{2} BC \sin. (\alpha + B)) + 2\pi CD (a + AB \sin. \alpha) + BC \sin. (\alpha + B) + \frac{1}{2} CD \sin. (\alpha + B + C))$ u. s. w. wovon der Fortgang leicht in die Augen fällt.

§. 116.

Man ziehe aus A nach den Schwerpunkten der Linien BC, CD, DE - - - die Linien AG, AH, AK - - - -, und trage $\frac{2}{3}$ AG aus A in M, $\frac{2}{3}$ AH aus A in N, $\frac{2}{3}$ AK aus A in O, u. s. w., so haben folgende Proportionen statt:

$$AG : AM = Gg : Mm$$
$$AH : AN = Hh : Nn$$
$$AK : AO = Kk : Oo$$ u. s. w.

Daher

Daher ist $Mm = \frac{2}{3}\, Gg$, $Nn = \frac{2}{3}\, Hh$, $Oo = \frac{2}{3}\, Kk$ u. s. f. Nun ist aber $Gg = AB \sin. \alpha + \frac{1}{2} BC \sin. (\alpha + B)$, $Hh = AB \sin. \alpha + BC \sin. (\alpha + B) + \frac{1}{2} CD \sin. (\alpha + B + C)$, $Kk = AB \sin. \alpha + BC. \sin. (\alpha + B) + CD. \sin. (\alpha + B + C) + \frac{1}{2} DE \sin. (\alpha + B + C + D)$ u. s. f. (§. 26). Daher ist auch

$Mm' = a + \frac{2}{3} (AB \sin. \alpha + \frac{1}{2} BC. \sin. (\alpha + B.))$

$Nn' = a + \frac{2}{3} (AB \sin. \alpha + BC \sin. (\alpha + B) + \frac{1}{2} CD \sin. (\alpha + B + C))$

$Oo' = a + \frac{2}{3} (AB \sin. \alpha + BC - - - - - + \frac{1}{2} DE \sin. (\alpha + B + C + D.))$

$Pp' = a + \frac{2}{3} (AB \sin. \alpha + BC - - - - - - - \frac{1}{2} EF \sin. (\alpha - - - - - - E))$ wovon der Fortgang leicht zu ersehen ist.

§. 117.

Man denke sich aus A auf alle Seiten der Figur BC, CD, DE - - - - - - oder nöthigen Falls auf ihre Verlängerungen senkrechte Linien gezogen (sie sind in der Figur, um sie durch die Menge der Linien nicht undeutlich zu machen, nicht angezeigt) und es seyen die Grössen dieser Senkrechten p, q, r, s - - - - - - - so hat man für die Inhalte dieser Dreyecke ABC, ACD, ADE - - - - folgende Werthe $ABC = \frac{1}{2} BC. p$, $ACD = \frac{1}{2} CD. q$, $ADE = \frac{1}{2} DE\, r$. u. s. w. Es ist aber nach (§. 26.) $p = BA \sin. B$, $q = BC \sin. C + BA \sin. (C + B)$.

r =

$r = DC \sin. D + CB \sin. (D + C) + BA \sin. (D + C + B)$,

$s = ED \sin. E + DC \sin. (E+D) + CB \sin. (E+D+C) + BA \sin. (E - - - - - B)$ u. s. w. folglich ist

$ABC = \frac{1}{2} BC, BA \sin. B.$

$ACD = \frac{1}{2} CD (BC \sin. C + BA \sin. (C + B))$,

$ADE = \frac{1}{2} DE (DC \sin. D + CB \sin. (D + C) + BA \sin. (D + C + B))$,

$AEF = \frac{1}{2} EF (ED \sin. E + DC \sin. E + D) + CB \sin. (E + D + C) + BA \sin. (E + D + C + B)$

Werden nun die Inhalte dieser Dreyecke mit ihren im vorigen §. gefundenen Entfernungen ihres Schwerpunkts und auch noch mit 2π multiplicirt, so erhält man für den körperlichen Inhalt des ganzen Körpers, M =

$\pi BC BA \sin. B (a + \frac{2}{3} (AB \sin. \alpha + \frac{1}{2} BC \sin (\alpha + B))) +$
$\pi CD (BC \sin. C + BA \sin. (C + B)) (a + \frac{2}{3} (AB \sin. \alpha + BC \sin. (\alpha + B) + \frac{1}{2} CD \sin. \alpha + B + C))) +$
$\pi DE (DC \sin. D + CB \sin. (D + C) + BA \sin. (D + C + B)) (a + \frac{2}{3} (AB \sin. \alpha + BC \sin. (\alpha + B) + CD \sin. (\alpha + B + C) + \frac{1}{2} DE \sin. \alpha + B + C + D))) +$
$\pi EF (ED \sin. E + DC \sin. (E + D) + CB \sin. (E + D + C) + AB \sin. (E + D + C + B)) (a + \frac{2}{3} (AB \sin. \alpha + BC \sin. (\alpha + B) + CD \sin. (\alpha + B + C) + DE \sin. (\alpha + B + C + D) + \frac{1}{2} EF \sin. (\alpha + B + C + D + E)))$ u. s. w.

§. 118.

Es verstehet sich von selbst, daß wenn TV die Achse des erzeugten Körpers ist, man in den Formeln (§. 115. 116. u. 117.) $a = 0$, und so auch, wenn AB die Bewegungsachse der erzeugenden Ebene ist, $\alpha = 0$ setzen müße.

Ich setze zum Beschluße folgendes Beyspiel in Zahlen hieher, woraus man zugleich sehen kann, wie man die Rechnung am bequemsten einrichten könne:

§. 119.

Beyspiel.

Es seyen die Maaße der erzeugenden Ebene ABCDEFA (Fig. 55.) folgende:

AB = 172,	FAB = + 29°,	und A = + 151°,
BC = 120,	ABC = + 41°,	daher B = + 139°,
CD = 64,	BCD = − 70°,	C = − 110°,
DE = 115,	CDE = + 27°,	D = + 153°,
EF = 81,385,	DEF = + 58°,	E = + 122°,
FA = 78,064,	EFA = − 85°,	F = − 95°,

die Ebene ABCDEF bewege sich um die Achse TV, welche mit AB einen Winkel $\alpha = 49°$ einschließt.

Zuerst berechne man die Größen AB sin. α, BC sin. $(\alpha + B)$, CD sin. $(\alpha + B + C)$ u. s. w. Nämlich

Log. AB	=	2,2355284
Log. sin. 49°	=	9,8777799 — 10
Log. prod.	=	2,1133083
prod.	=	+ 129,810.
Log. BC	=	2,0791812
Log. sin. 188°	=	9,1435553 — 10
Log. prod.	=	1,2227365
prod.	=	— 16,700.
Log. CD	=	1,8061800
Log. sin. 78°	=	9,9904044 — 10
Log. prod.	=	1,7965844
prod.	=	+ 62,602.
Log. DE	=	2,0606978
Log. sin. 231°	=	9,8905026 — 10
Log. prod.	=	1,9512004
prod.	=	— 89,372.
Log. EF	=	1,9105481
Log. sin. 353°	=	9,0858945 — 10
Log. prod.	=	0,9964426
prod.	=	— 9,918.
Log. FA	=	1,8924511
Log. sin. 258°	=	9,9904044 — 10
Log. prod.	=	1,8828555
prod.	=	— 76,358.

Aus die-
sem

sem erhält man nach (§. 116.) $Wx = \frac{1}{2} AB \sin. \alpha$, $Gg = AB \sin. \alpha + \frac{1}{2} BC \sin. (\alpha + B)$ u. s. w. nämlich $Wx = 64,905$,

$Gg = 129,810 - 8,350 = 121,460$, $Hh = 129,810 - 16,700 + 31,301 = 144,411$

$Kk = 129,810 - 16,700 + 62,602 - 44,686 = 131,026$,

$Ll = 129,810 - 16,700 + 62,602 - 89,372 - 4,959 = 81,381$

$Qq = 129,810 - 16,700 + 62,602 - 89,372 - 9,918 - 38,179 = 38,243$, und aus diesem ferner:

$Mm = \frac{2}{3} Gg = 80,973$

$Nn = \frac{2}{3} Hh = 96,174$

$Oo = \frac{2}{3} Kk = 87,351$

$Pp = \frac{2}{3} Ll = 54,254$. Sodann berechne man alle aus A auf die Seiten der erzeugenden Ebene gezogene Senkrechten nach (§. 117.), als: $p = BA \sin. B$.

Log. BA	= 2,2355284
Log. sin. 139°	= 9,8169429 — 10
Log. prod.	= 2,0524713
prod.	= + 112,842 = p

$q = BC \sin. C + BA \sin. (C + B)$.

Log. BC	= 2,0791812
Log. sin.(−110°)	= 9,9729858 — 10
Log. prod.	= 2,0521670
prod.	= — 112,763.

Log. BA = 2,2355284
Log. sin. 29° = 9,6855712 — 10
Log. prod. = 1,9210996
prod. = + 83,387, folglich

q = — 112,763 + 83,387 = — 29,376.

r = DC sin. D + CB sin. (D + C) + BA sin. (D + C + B).

Log. DC = 1,8061800
Log. sin. 153° = 9,6570468 — 10
Log. prod. = 1,4632268
prod. = + 29,055.

Log. CB = 2,0791812
Log. sin. 43° = 9,8337833 — 10
Log. prod. = 1,9129645
prod. = + 81,839.

Log. BA = 2,2355284
Log. sin. 182° = 8,5428192 — 10
Log. prod. = 0,7783476
prod. = — 6,002, daher ist

r = 29,055 + 81,839 — 6,002 = 104,892.

S = ED sin. E + DC sin. (E + D) + CB sin. (E + D + C) + BA sin. (E + D + C + B).

Log. ED = 2,0606978
Log. sin. 122° = 9,9284205 — 10
Log. prod. = 1,9891183
prod. = + 97,525.

Log. DC	=	1,8061800
Log. sin. 275°	=	9,9983442 — 10
Log. prod.	=	1,8045242
prod.	=	— 63,756.

Log. CB	=	2,0791812
Log. sin. 165°	=	9,4129962 — 10
Log. prod.	=	1,4921774
prod.	=	+ 31,058.

Log. BA	=	2,2355284
Log. sin, 304°	=	9,9185742 — 10
Log. prod.	=	2,1541026
prod.	=	— 142,594, also ist

S = 97,524 — 63,756 + 31,058 — 142,594 = — 77,767, und nun hat man für die Oberfläche des oftbesagten Körpers, wie folget:

Der Theil der Oberfläche die durch die Linie AB erzeugt worden ist, ist AB. 2π Wx.

Log. AB	=	2,2553284
Log. Wx	=	1,8122782
Log. 2π	=	0,7981798
Log. prod.	=	4,8459864
prod.	=	70143,33.

Der Theil, der durch die Linie BC erzeuget worden ist, ist = BC. 2π. Gg.

Log.

Log.	BC	= 2,0791812
Log.	Gg	= 2,0844333
Log.	2π	= 0,7981798
Log.	prod.	= 4,9617943
	prod.	= 91578,66.

Der durch CD entstandene Theil ist CD. 2π. Hh.

Log.	CD	= 1,8061800
Log.	Hh	= 2,1596003
Log.	2π	= 0,7981798
Log.	prod.	= 4,7639601
	prod.	= 58071,11.

Der durch DE entstandene Theil ist DE. 2π. Kk.

Log.	DE	= 2,0606978
Log.	Kk	= 2,1173575
Log.	2π	= 0,7981798
Log.	prod.	= 4,9762351
	prod.	= 94674,96.

Der durch EF entstandene Theil ist EF. Ll. 2π.

Log.	EF	= 1,9105481
Log.	Ll	= 1,9105230
Log.	2π	= 0,7981798
Log.	prod.	= 4,6192509
	prod.	= 41615,10, und end-

lich der durch FA erzeugte Theil der Oberfläche ist = FA. Qq. 2π.

Log.	FA	=	1,8924511
Log.	Qq	=	1,895520
Log.	2π	=	0,7981798
Log.	prod.	=	4,2731829
	prod.	=	18757,83.

Werden nun alle diese Produkte zusammen addiret, so hat man die ganze Oberfläche des Körpers = 374840,99.

Für den körperlichen Inhalt der durch die Dreyecke ABC, ACD, ADE, AEF erzeugten Theile, hat man folgende Bestimmungen: nämlich der durch ABC erzeugte Theil des Körpers ist $\frac{1}{2}$ BC. p. 2π. Mm = $\frac{1}{2}$ BC. p. 2π. $\frac{2}{3}$ Gg = 2π. BC. Gg. $\frac{1}{3}$ p; da nun 2π. BC. Gg den durch BC erzeugten Theil der Oberfläche ausdrücket; dieser aber schon vorhin = 91578,66 gefunden worden ist, so darf man nur dieses Produkt noch mit $\frac{1}{3}$ p multipliziren, um den durch das Dreyeck ABC entstandenen Theil des Körpers zu bekommen. Durch ähnliche Schlüsse wird gefunden, daß, um den körperlichen Inhalt des durch das Dreyeck ACD entstandenen Theiles des Körpers zu bekommen, man nur den Theil der Oberfläche, welcher durch CD entstanden ist = 58071,11 mit $\frac{1}{3}$ q multiplizieren darf, und so mit allen übrigen Theilen des Körpers. Man muß

aber

aber auf das Positive und Negative dieser Grössen Acht zu haben nur nicht vergessen. Die ganze Rechnung wird ohngefähr so aussehen:

Log. 91578,66 = 4,9617943
Log. $\frac{1}{2}$ p = 1,5753495
Log. prod. = 6,5371438
prod. = + 3444640.

Log. 58071,11 = 4,7639600
Log. $\frac{1}{3}$ q = 0,9908714
Log. prod. = 5,7548314
prod. = = — 568632,8.

Log. 94674,96 = 4,9762350
Log. $\frac{1}{3}$ r = 1,5436211
Log. prod. = 6,5198561
prod. = + 3310214.

Log. 41615,10 = 4,6192502
Log. $\frac{1}{3}$ s = 1,4136685
Log. prod. = 6,0329187
prod. = — 1078744.

Das zweyte und vierte Produkt ist deßwegen negativ, weil es q und s ebenfalls sind (sieh oben). Es ist demnach der Inhalt des ganzen erzeugten Körpers = 3444640 — 568632,8 + 3310214 — 1078744 = 5107477,2.

Anhang.

Nachricht von einem neuen Zuleginstrumente.

Wenn der Markscheider die in den Gruben gemessenen Winkel zu Papier bringen will, so bedienet er sich gewöhnlich des in der Bergmännischen Sprache sogenannten Zuleg=Instruments, welches ein in einem viereckigten Gehäuse eingeschlossener Kompaß ist, dessen Stundenring eben so, wie der des Hänge=Kompaßes, womit die Winkel in der Grube gemessen werden, in 24 Stunden abgetheilet ist, die von der Rechten nach der Linken gezählet werden. Die eine mit der 12ten Stundenlinie paralelle Seite des Gehäuses dienet hiebey als Lineal, und wird an dem Endpunkte einer jeden Linie so lange um denselben herumgedrehet, bis das nördliche Ende der Magnetnadel genau denjenigen Winkel zeiget, den sie an dem übereinstimmenden Grubenpunkte gezeiget hat. Längst dieser Seite hin wird endlich der eine Schenkel dieses Winkels gezogen. Es versteht sich von selbst, daß man vorhin das Instrument so einrichten muß, daß, wenn diejenige Seite, die hier als Lineal dienet, an die auf dem Papier gezogene observierte Mittagslinie angelegt wird, das nördliche Ende der Nadel genau auf 24 zeiget, welches entweder durch Herum-

drehen

drehen des Kompaßes in seinem Gehäuse, oder durch Orientierung des Papiers bewerkstelligt wird.

Es ist nicht zu läugnen, daß, wenn sonst alles an diesem Werkzeuge fleißig und gehörig gearbeitet ist, der Markscheider seine auf diese Weise verzeichnete Winkel wenigstens eben so genau erhält, als diejenigen Feldmesser, die ihre auf dem Felde gemessene Winkel mit dem Transporteur auf das Papier tragen; jedoch muß Ersterer noch folgende Stücke in Acht nehmen, auf welche letzterer nicht zu sehen braucht. Als erstens muß der Zeichnungstisch nicht allzunahe an einer Thüre, einem Fenster, Ofen, Kasten u. d. g. stehen; weil sich gewöhnlich an diesen Dingen Eisen, und öfters sogar magnetisches Eisen befindet, welches bey jeder veränderten Stellung des Kompaßes, und dessen Entfernung von demselben, die Nadel nach dem Gesetz der zusammen gesetzten Kräfte bald mehr, bald weniger von ihrer Richtung ablenket. Ich bemerkte an den Angeln meiner Stubenthüre und Fenster, an den eisernen Füssen eines Kachelofens, an dessen Offenrohr, und an mehr dergleichen in einerley Lage lange Zeit ruhig gestandenem Eisen eine ziemlich starke Polarität, so zwar, daß allemal das obere Ende das nördliche, das untere aber

das

das südliche Ende der Nadel abstieß; ja sogar an einem gemeinen Handzirkel, der einige Monate in einer Schublade ungefähr in der Richtung der Mittagslinie ruhig gelegen hatte, bemerkte ich schon einige Polarität.

Zweytens muß der Zeichnungstisch oder wenigstens das Reißbrett so viel als möglich horizontal seyn, widrigenfalls sich nicht nur die Nadel wegen der kegelförmigen Höhlung ihres Hütchens nicht frey genug bewegen kann; sondern auch ihr nördliches Ende entweder über- oder unter der Ebene des Stundenringes zu liegen kommt, und also eine Parallaxis von oft 2 bis 3 Graden verursachet;

Drittens ist es nicht rathsam, sich des Kompaßes zu bedienen zu einer Zeit, da eine Wetterwolke nahe ist. Ob ihre Wirkung auf die Magnetnadel sich auch bis in die Gruben erstrecket, kann ich nicht mit Gewißheit bestimmen; wohl aber habe ich einmal (freylich nur ein einziges Mal) unter dem Zeichnen erfahren, da ich zu einer solchen Zeit das Zuleg-Instrument an der schon vorhin auf dem Papier gezogenen observierten Mittagslinie anlegte, daß die Nadel nicht genau 24 zeigte, unerachtet ich versichert war, daß weder das Papier,

noch

noch der Tisch im mindesten verrückt worden war. Ich ließ alles ruhig stehen, und nachdem das Gewitter vorbey war, und der starke Regen nachgelassen hatte, fand ich die Nadel wieder genau auf 24 stehen.

Diese Unvollkommenheiten, die dem Gebrauche dieses Instruments ankleben, und vielleicht auch das lange Warten an einem jeden Endpunkte einer Linie, bis die Nadel wieder in Ruhe kommt, welches wirklich langweilig und verdrüßlich ist, diese Unvollkommenheiten, sage ich, haben vielleicht den bereits vor einigen Jahren verstorbenen pfalzbairischen Bergverweser Herrn Fuhrmann veranlaßt, auf ein besseres und bequemeres Instrument zu denken; und wirklich hat er eines dergleichen erfunden, und eigenhändig verfertiget, welches zum Gebrauche bequemer, und wegen seiner Einfachheit und mithin auch geringen Preises desselben, allgemeiner bekannt zu werden verdienet.

Es scheinet, der Erfinder desselben hatte es zu seinem eigenen Gebrauche allein bestimmt; denn ausser dem Wenigen, was er davon mündlich dem damaligen Bergpraktikanten, nunmehrigen Hofkammer- und Bergrath Tit. Herrn von Plank,

der

der dieses Instrument mir mitzutheilen die Güte hatte, unterrichtete, findet man nirgends einige Meldung davon. Da aber der Erfinder bereits verstorben ist, so glaube ich nicht, durch die Bekanntmachung seiner Erfindung unbillig gegen denselben zu handeln.

Das ganze Instrument, wie dasselbe zum Gebrauche zusammen gesetzt ist, ist in (Fig. 56.) vorgestellt. AB ist eine einen halben Zoll dicke hölzerne Schiene, deren untere Queerleiste B, an der untern in der Figur nicht sichtbaren Seite, ungefähr einen halben Zoll vorstehet; damit diese längst dem Rande eines Reißbrettes oder Tisches sanft hin- und her geschoben werden könne. Sie ist im übrigen von einer gewöhnlichen Reißschiene nicht unterschieden, nur daß sie nach ihrer Länge AB durchbrochen ist, die als eine Nute dienet, worin sich das sogleich zu beschreibende Instrument C bewegen kann.

A (Fig. 57.) ist eine von starkem Meßingbleche gedrehte Scheibe etwa $1\frac{1}{2}$ Zoll oder darüber im Halbmesser, die, wie bei allen Markscheide-Instrumenten gewöhnlich ist, in 24 Stunden, und jede dieser wieder in 8 Theile abgetheilet ist. Die

Stun-

Stunden werden aber hier nicht wie bey jenen von der Rechten zur Linken, sondern von der Linken zur Rechten gezählt. In der Mitte derselben ist ein zilyndrisches Loch a etwa $\frac{1}{10}$ oder $\frac{15}{100}$ eines Zolles im Durchmesser. Auf der andern Seite dieser Scheibe gerade über dem gemeldeten Loche a ist eine Röhre c, etwa einen halben Zoll lang, angelöthet, deren Durchmesser dem des Loches a gleich ist, wie die punktirten Linien in (Fig. 58.) zeigen.

An eben dieser untern Seite der Scheibe sind zwey Lappen b. b. gerade in der Richtung der Linie 12. 24 im rechten Winkel an der Scheibe angelöthet. Sie brauchen ebenfalls nur von starkem Meßingbleche zu seyn, und ihre Breite, die mit der jezt genannten Linie einen rechten Winkel machen muß, kann ein halber Zoll seyn; sie müssen genau in die vorhin beschriebene Nute hinein passen, doch so, daß die Scheibe ganz leicht in derselben beweget werden könne.

D (Fig. 59.) ist eine Platte von starkem Meßingbleche, dessen beyde längere Seiten mit einander paralell, und auf diese Weise wie ein gewöhnliches Lineal abgeschärft sind; die Länge desselben kann 6 bis 7 Zoll seyn, und ist überhaupt willkühr-

führlich; die Breite muß etwas größer, als der Durchmesser der Scheibe seyn. In der Mitte dieses Lineals ist ein zilyndrischer eisener Steft d von ungefähr einem Zoll Länge senkrecht befestiget, seine Dicke muß eben so seyn, daß er in der vorhin be-beschriebenen Röhre C zwar frey; jedoch ohne zu schlottern um seine Achse bewegt werden könne. Das obere Ende desselben ist mit einem Schraubengewinde versehen, damit ein Zeiger, der völlig wie ein Uhrzeiger gestaltet, und in (Fig. 56 u. 60.) zu sehen ist, vermittelst eines Schraubenmütterchens daran angeschraubt werden könne.

Wird der Steft d zuerst durch die Nute der Schiene AB, und dann durch die Röhre der Scheibe A gesteckt, ferner der Zeiger vermittelst des Mütterchens daran befestiget, so ist dieses Instrument zum Gebrauche fertig, und wenn alles gehörig gearbeitet ist, so muß man das Ganze nur nach der Länge der Nute AB und ohne die Scheibe um ihren Mittelpunkt im mindesten zu verrücken, bewegen können; hingegen muß man nicht nur das Lineal um die Achse des Steftes ohne Wanken und Schlottern frey ohne Gedräng bewegen können; sondern letzterer muß auch in seiner Bewegung den Zeiger mit sich herumführen, ohne irgendwo durch

sein

sein Aufstreifen an der Scheibe daran gehindert zu werden. Herr Fuhrmann hat dieses letztere durch ein zwischen dem Zeiger und der Scheibe unterlegtes Plättchen von Meßing oder Eisen zu erzielen gesucht; es ist aber besser gethan, wenn man dieses Plättchen an den Steften fest anschraubet, und diesen oberhalb demselben etwas dünner machet, damit der Zeiger auf dem Ansatz, und nicht auf dem Plättchen aufliege. Auch kann ein geschickter Arbeiter leicht einen Schieber E (Fig. 56.) anbringen, dessen unterer Theil die Dicke des Lineals D (Fig. 59.) hat, damit die Schiene auf dem Tische recht fest aufliegen könne, ohne zu wanken.

Aus dieser Beschreibung wird man den Gebrauch des Instruments von selbst einsehen. Man stellet vor allem dasselbe so, daß das Lineal auf der, auf dem festgemachten Papier, gezogenen observierten Mittagslinie AN (Fig. 61.) genau anliege, schraubet das Mütterchen etwas los, und stellet den Zeiger auf 24, befestiget ihn wieder vermittelst des Mütterchens, und rücket die Schiene nach dem Anfangspunkt A, drehet zugleich das Lineal so lange, bis der Zeiger genau dasjenige Streichen zeiget, welches die Linie AB in der Grube hatte; ziehet AB und bestimmet den Punkt B; rucket ferner

ner das Instrument nach B, und drehet das Lineal so, daß der Zeiger das Streichen der BC zeiget; ziehet BC, bestimmet den Punkt C, und verfahret auf ähnliche Weise bey allen übrigen Punkten D, E u. s. w. Es scheinet zwar, daß viele Geschicklichkeit dazu gehöre, die Schiene so zu rücken, und das Instrument so zu drehen, daß der Zeiger das verlangte Streichen genau zeige, und zugleich das Lineal an dem jedesmal bestimmten Punkt anliege; aber die Erfahrung zeiget, daß noch weniger dazu gehöre, als einen Winkel vermittelst eines Transporteurs zu verzeichnen, und daß die Arbeit ziemlich geschwinde von statten gehe.

Es ist daher dieses Instrument dem Markscheider in allem Betrachte zu empfehlen, und verdienet in Hinsicht der oben erzählten dem Kompaß anklebenden Mängel, vor demselben den Vorzug. Freylich, wer das bischen Rechnen nicht scheuet, der wird auf beyde Instrumente gern Verzicht thun, und lieber nach dem Vorschlag des Hrn. Bergmeisters Scheidhauer in Freyberg, die Streich-Sinusse und Cosinusse aller Linien berechnen, und so die Winkel vermittelst Abszissen und Ordinaten weit richtiger, als je ein Instrument es zu leisten im Stande ist, verzeichnen. Wenn nemlich AN, Bn,

Cn,

Cn, Dn - - - die Richtung der Magnetnadel in den Punkten A, B, C, D - - - und N, n, n - - - der Nordpunkt derselben ist, so ist NAB, nBC, nCD, nDE - - - - das Streichen der Linien AB, BC, CD - - - und man bekommt

$$Ab = AB. \cos. NAB$$
$$Ac = Ab + BC. \cos. nBC$$
$$Ad = Ac + CD. \cos. nCD$$
$$Ae = Ad + DE. \cos. nDE$$ u. s. w.

Ferner:

$$Bb = AB \sin. NAB$$
$$Cc = Bb + BC \sin. nBC$$
$$Dd = Cc + CD \sin. nCD$$
$$Ee = Dd + DE \sin. nDE$$ u. s. w. Indessen giebt es doch Fälle, wo dieses Instrument auch dem geübten Rechner gute Dienste leistet, z. B. wenn ein Grubenriß zu kopieren ist, oder wenn das Streichen irgend einer Linie eines Grundrisses nur beynahe zu wissen verlangt wird, wo es der Mühe des Rechnens nicht lohnet u. d. gl.

Wollte man um den Stundenzirkel herum noch einen in 360° Grade getheilten Zirkel beschreiben, die eben so, wie auf ersterem von der Linken zur Rechten gezählet würden, so könnte dieses Instrument auch für solche Feldmesser dienen, denen entwe-

entweder meine in §. 34. gezeigte Art Winkel aufzutragen zu mühesam scheinet, oder die gar der trigonometrischen Rechnungen unkündig sind, nnd deßwegen es für rathsamer finden, die Winkel unmittelbar aufzutragen. Da aber der Nullpunkt, von welchem die Grade zu zählen angefangen werden, auf diesem Instrumente immer einerley Lage in Ansehung des Randes des Papiers hat, so muß man zuerst das Lineal an die erste Linie AB der gebrochenen Linie ABCDEF - - - - - (Fig. 62.) genau anlegen, den Zeiger auf den Punkt Null richten und befestigen, und dann nicht die Winkel ABC, BCD, CDE - - - - selbst, sondern die algebraische Summe ihrer Nebenwinkel B, B—C, B—C+D, B—C+D—E - - - - - - - - auftragen (§. 14.), wenn die zweyte Linie BC von der ersten AB nach der Rechten abweichet. Ist die Summe negativ, wie z. B. hier B — C, wo C > B angenommen worden ist, so addieret man 360°. Weichet aber die zweyte Linie BC von der ersten AB (Fig. 63.) zur Linken ab, so wird anstatt dieser Summe, ihre Ergänzung zu 360° Grade genommen, wovon die Ursache in der Einrichtung des Instruments liegt; weil nemlich die Grade nur von der Linken zur Rechten auf demselben gezählet werden. Wollte man aber noch einen Zirkel auf demselben anbringen,

gen, auf welchen die Zahlen nach der entgegen gesetzten Richtung geschrieben wären, so bedürfte man der Ergänzung zu 360° Graden nicht, sondern man könnte auch in diesem Falle die algebraische Summe selbst gebrauchen (§. 16.).

An=

Nachtrag.

Die in den §§.26. 27. bis Ende vorkommenden Formeln sind alle, wie man aus den Beweisen gesehen hat, für die Nebenwinkel der Poligone berechnet. Erst nachdem das Manuskript bereits 18 Monate aus meinen Händen (ich kann bis jezt die Ursache nicht errathen, warum dessen Herausgabe von dem Verleger so lange verschoben worden ist), und schon mehrere Bögen abgedruckt waren, entdeckte ich, daß durch eine leichte Abänderung der genannten Formeln, dieselbe für die Poligonswinkel selbst anpassend, und hiedurch die Nebenwinkel bey diesen Rechnungen ganz entbehrlich gemacht werden können, da es nun für die Ausübung ein wesentlicher Vortheil ist, die Rechnung so viel möglich abzukürzen, und in dieser Hinsicht es wirklich rathsamer ist, lieber so wie es in trigometrischen Rechnungen gewöhnlich ist, die Poligonswinkel selbst, als ihre erst aus denselben hergeleitete Nebenwinkel in die Rechnung zu bringen, so scheinet mir diese Verbesserung hier nicht überflüßig zu seyn.

Die ganze Abänderung dieser Formeln bestehet darin, daß man vor allen geraden Gliedern derselben, vor dem 2ten, 4ten, 6ten u. s. w. nemlich,

lich, das Zeichen — anstatt + setzet, und anstatt A, B, C, D - - - die Buchstaben a, b, c, d - - - welche die den vorigen entsprechende Poligonswinkel selbst bezeichnen, setzet, welches folgendermassen erwiesen werden kann.

Es ist $A = 180° - a.$
$B = 180° - b.$
$C = 180 - c.$ u. s. w.

Daher auch $A+B = 180° - a + 180° - b$
$= 2.180° - a+b.$
$A+B+C = 3.\ 180° - a+b+c.$
$A+B+C+D = 4.\ 180° - a+b+c+d$ u. s. w.

Ferner ist:
$\sin.\ A = \sin.\ 180° - a = \sin.\ a.$
$\sin.\ (A+B) = \sin.\ (2.\ 180° - (a+b)) = -$
$\sin.\ (a+b)$ (§. 21).
$\sin.\ (A+B+C) = \sin.\ (3.\ 180° - a+b+c))$
$= \sin.\ a+b+c$ (§. 21).
$\sin.\ (A - - - - - - - D) = \sin.\ (4.\ 180° -$
$(a - - - d)) =$
$- \sin.\ (a+b+c+d)$ Die weitere Fortsezung dieser Schlüsse fällt in die Augen; alle Glieder nämlich, welche einen Sinus von einer ungeraden Anzahl, als: 1, 3, 5, 7 - . - - - Winkeln enthalten, behalten das Zeichen +, diejenigen

nigen aber, welche einen Sinus von einer geraden Anzahl, als: 2, 4, 6, 8 - - - - - - Winkeln enthalten, bekommen das Zeichen —, nun ist aber ersteres wirklich der Fall bey allen ungeraden, und lezteres bey allen geraden Gliedern der vorhin genannten Formeln, welche Sinusse der Winkel enthalten, folglich ist von diesen erwiesen w. z. e. w.

Mit den Cosinussen der Winkel ist es zwar umgekehrt; es ist nemlich:

$$\text{Cos. } A = \text{cos. } (180^\circ - a) = -\text{cos. } a \text{ (§. 21.)}$$

$$\text{Cos. } (A + B) = \text{cos. } (2.\ 180^\circ - (a + b)) = \text{cos. } (a + b).$$

$$\text{Cos. } (A+B+C) = \text{cos. } (3.\ 180^\circ - (a+b+c)) = -\text{cos. } (a + b + c).$$

$$\text{Cos. } (A---D) = \text{cos. } (4.\ 180^\circ - (a---d) = \text{cos. } (a + b + c + d) \text{ u. s. w.}$$

Woraus es augenscheinlich ist, daß alle Glieder, welche Cosinusse von einer ungeraden Anzahl, als: 1, 3, 5, 7 - - - - - Winkel enthalten, negativ, diejenigen Glieder aber, welche Cosinusse von 2, 4, 6, 8 - - - - oder überhaupt einer geraden Anzahl Winkel enthalten, positiv bleiben; aber ersteres ist wirklich bey den geraden, und lezteres bey den ungeraden Gliedern der oft genannten Formeln, welche Cosinusse enthalten, der Fall (wenn man die

Glei-

Gleichung in (§. 30.) und die im Anfang des (§. 31.) ausnimmt) folglich hat die vorhin gezeigte Verbesserung auch bey diesen statt.

In der Gleichung (§. 30.) und im Anfang des (§. 31.) mußte man diese Veränderung der Zeichen + in — an den ungeraden Gliedern vornehmen, in (§. 30.) nämlich

$$Ab = - AB. \cos. (180^\circ - a).$$

$$Ac = - AB. \cos. (180^\circ - a) + BC \cos. (180^\circ - (a + b))$$

$$Ad = - AB \cos. (180^\circ - a) + BC \cos. (180^\circ - a + b)) - CD \cos. (180^\circ - (a + b + c))$$

u. s. w. und in (§. 31.)

$$AL = - AB. \cos. (180^\circ - a) + BC. \cos. (180^\circ - (a+b)) - CD. \cos. (180^\circ - (a+b+c)) + DE. \cos. (180^\circ - (a+b+e+d)),$$

u. s. w.

Da aber auch $\cos. 180^\circ - a = - \cos. a.$

$\mathrm{Cos}. (180^\circ - (a + b)) = - \cos. (a + b).$

$\mathrm{Cos}. (180^\circ - (a + b+c) = - \cos. (a+b+c)),$

u. s. w. ist, so erhalten diese Gleichungen in den beyden Paragraphen eine noch kürzere, mit allen übrigen Formeln vollkommen gleiche Gestalt, nämlich in (§. 30.)

$$Ab = AB.\ cos.\ a.$$
$$Ac = AB.\ cos.\ a - BC.\ cos.\ (a + b).$$
$$Ad = AB.\ cos.\ a - BC.\ cos.\ (a + b) + CD\ cos.\ (a + b + c)$$
$$Ae = AB.\ cos.\ a - BC.\ cos.\ (a + b) + CD\ cos.\ (a + b + c) - DE.\ cos.\ (a+b+c+d)$$

u. s. w. und in (§. 31.)

$$AL = AB\ cos.\ a - BC\ cos.\ (a + b) + CD\ cos.\ (a + b + c) - DE\ cos.\ (a+b+c+d) + \text{-- --} - \text{-- --} + \text{-- --}$$

Uebrigens ist es für sich klar, daß um auch den (§. 37.) auf die Poligonswinkel selbst anwendbar zu machen, man in demjenigen Bruche, welcher Tang LAB bestimmet, diese Veränderung der Zeichen + in — sowohl an den geraden Gliedern des Zählers, als an den des Nenners desselben vornehmen müsse, es ist nämlich Tang LAB =

$$\left\{\begin{array}{l} \ BC\ sin.\ b \\ -\ CD\ sin.\ (b+c) \\ +\ DE\ sin.\ (b+c+d) \\ -\ EF\ sin.\ (b+c+d+e) \\ +\ \text{- - - - - - -} \\ -\ \text{- - - - - - -} \\ +\ \text{- - - - - - -} \end{array}\right\} : \left\{\begin{array}{l} \ AB \\ -\ BC\ cos.\ b \\ +\ CD\ cos.\ (a+b) \\ -\ DE\ cos.\ \text{- - - -} \\ +\ \text{- - - - -} \\ -\ \text{- - - - -} \\ +\ \text{- - - - -} \end{array}\right\}$$

Be-

Bekanntmachung.

Folgendes scheinet mir in einem Buche, welches Beyträge zur praktischen Geometrie lieferet, um so viel mehr eine Stelle zu verdienen, als es eine noch wenig bekannte, und doch für die Ausübung wichtige Wahrheit betrift.

Sie betrift die ihres großen Nutzens wegen sehr bekannte, und die auch von Hrn. Professor Däzel in seiner vor kurzem herausgegebenen Goniometrie aufgenommene Aufgabe (§. 65.) die Lage eines Punktes D, von welchem man nach dreyen Punkten A, B, C, sehen kann, und deren Lage gegen einander bekannt ist, zu finden.

Meines Wissens hat noch Niemand die Vermuthung geäussert, daß ein in der Messung der Winkel γ oder δ (nach der Bezeichnung des Hrn. P. D. in dem vorhin genannten Werk) auch nur kleine begangene Fehler, z. B. von einer Minute, in dem gesuchten Winkel ω einen Irrthum von mehreren Graden verursachen, und dadurch die Lage des Punktes D merklich aus seiner Stelle verrücken könne, und doch findet sich dieses in mehreren Fällen wirklich so. Wir haben diese Bemerkung der Aufmerksamkeit des kursächsischen Legations-Sekretairs am hiesigen Hof Herrn von Beigel zu verdanken, der mir folgendes ihm bey einer Messung,

sung, die er sich zum Lieblingsgeschäfte machte, wirklich vorgekommenes Beyspiel mitzutheilen die Güte hatte.

Es seye AB=1064,1; BC=1174,2, $\varepsilon=95°$, $50'$, $\gamma=44°,31$, $\delta=39°,30$ (um bey der Bezeichnung des Hrn. P. D. stehen zu bleiben) $\phi=360°-(\varepsilon+\gamma+\delta)$, und der gesuchte Winkel BCD=ω, so findet man aus der bekannten Gleichung Cot. ω= Cot. ϕ + BC sin. δ : (AB sin. γ. sin. ϕ) ω = $112°,58'$.

Nimmt man hingegen δ nur um eine einzige Minute kleiner an, nemlich $\delta=39°,29$, so erhält man, wenn alles übrige, wie vorhin angenommen worden ist, bleibet, $\omega=104°,35'$, also ein Unterschied von $8°,23'$, und wenn ferner die Linie BD nach beyder Voraussetzungen berechnet wird, so gibt sich ein Unterschied von $\frac{1}{19}$ ihrer ganzen Länge.

In dem folgenden Beyspiel ist dieser Unterschied noch auffallender. Es seye AB=1000, BC =2000, $\varepsilon=149°,39'$, $\gamma=20°,19'$, und $\delta=9°$, $59'$, so ist, wenn man in der wahren Größe des Winkels δ bis auf eine oder zwey Minuten nicht gewiß seyn kann.

Für δ = $9°,59'$ ω = $32°,1'$.

Für δ = $10°,0'$ ω = $113°,51'$,

und für δ = $10°,1'$ ist ω = $360°$ —

$8°,41' = 351°,19'$. Welche ungeheure Unterschiede, die durch einen Fehler von einer Minute verursachet werden!

Jedoch fallen diese Unterschiede nur alsdann so groß aus, wenn die Summe der drey Winkel $\gamma + \delta + \varepsilon$ nur um wenige Minuten kleiner oder grösser, als 180° ist, in andern Fällen ist der gemeldete Unterschied, der von einer Minute Fehler herrührt, nicht so beträchtlich, so z. B. ist für $AB = 1000$, $BC = 2000$, $\varepsilon = 143°,41'$, $\gamma = 20°,19'$, und $\delta = 10°,0'$, $\omega = 93°,8$, hingegen für $\delta = 10°,1'$ ist $\omega = 94°,3'$.

Aber auch in dem zuerst genannten Falle, wenn nemlich $\varepsilon + \gamma + \delta$ sehr nahe an 180° grenzet, fallen die oft genannten Unterschiede, welche von einer Minute herrühren, bald kleiner, bald größer aus, je nachdem das Verähltniß der Größen AB, BC, γ, δ, und ε verschieden angenommen wird. Was sich wegen dieses Umstandes mit Gewißheit darüber sagen läßt, bestehet in Folgendem.

Erstens, der durch einen Fehler von einer Minute verursachte Irrthum in dem gesuchten Winkel ω (wenn $\varepsilon + \gamma + \delta$ nahe an 180° ist) wird desto grösser, je kleiner überhaupt die Winkel γ und δ sind, weil die Sinusse der kleinen Winkel beynahe mit ihren Winkeln in einerley Verhältniß zu- und ab-

neh-

nehmen, welches in dem Ausdruck BC sin. δ: (AB sin. γ sin. ϕ, wodurch Cot. ω zum Theil bestimmt wird, eine merkliche Veränderung verursachet, sobald γ oder δ verändert wird.

Zweytens, dieser verursachte Irrthum wird um so viel größer, je mehr die beyden Verhältnisse AB : BC, und sin. δ : sin. γ sich der Gleichheit nähern, oder welches das nämliche ist, jemehr der Bruch AB sin. γ : BC sin. δ sich der Einheit nähert. Bey völliger Gleichheit dieser Verhältnisse gehet die Unzuverläßigkeit der Auflösung in eine gänzliche Unbestimmtheit über; denn es ist in diesem Falle ω=BAC, und δ=BCA, (weil auch AB : BC=sin. BCA : sin. BAC ist) folglich ist $\varepsilon+\gamma+\delta=$ 180°, und man erhält Cot. $\omega = \frac{1}{\text{sin.} 180°} +$ Cot. 180°, es ist aber sin. 180° = 0, und Cot. 180° = cos. 180° : sin. 180 = $-\frac{1}{0}$, (§. 21.) also cot. $\omega = \frac{1-1}{0} = \frac{0}{0}$, welcher Ausdruck bekanntlich eine jede Größe vorstellen kann. Man sehe hierüber *Cagnoli Traité de Trigonometrie* (§. 342.), Herrn Professor Grünbergers Lehrbuch für die pfalzbayrischen Förster (§. 208.) auch *Wega* Vorlesungen über die Mathematik (§. 497).

BAYERISCHE STAATS-BIBLIOTHEK MUENCHEN

Fig. 2.
Fig. 4.
Fig. 5.
Fig. 7.
Fig. 9.

BAYERISCHE
STAATS-
BIBLIOTHEK
MUENCHEN

BSB Bayerische StaatsBibliothek

MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Neumann, Johann

Neue Beyträge zur praktischen Geometrie nebst einem Anhange

München 1800

Math.p. 377
urn:nbn:de:bvb:12-bsb10082482-1
VD18 10368426-002